<u>תרגול 5 – אדם צ'פמן</u>

שאלה:

ישנם שלושה כדים. בראשון יש כדור אחד לבן ו4 כדורים שחורים, בשני יש 2 כדורים לבנים ו3 כדורים שחורים, ובשלישי יש 3 כדורים לבנים ו2 כדורים שחורים. מבצעים 6 פעמים את הפעולות הבאות: בוחרים כד באקראי, מוציאים ממנו כדור באקראי ומחזירים אותו לכד. מה הסיכוי שמתוך 6 הכדורים שנבחרו, לפחות 2 מהם לבנים?

תשובה:

הסיכוי שבהוצאה אחת יצא כדור לבן הוא

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5}=\frac{2}{5}$$

נסמן בX את מספר הלבנים שיצאו. מכיוון שהסיכוי כל פעם שיצא לבן הוא קבוע $\frac{2}{5}$, ההתפלגות של X בינומית

$$X\sim Bin\left(6,\frac{2}{5}\right)$$

הסיכוי שיצאו לפחות שני לבנים הוא 1 פחות הסיכוי שיצא לבן או רק שחורים, כלומר

$$P(X\geq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-\left(\frac{3}{5}\right)^{6}-6\cdot\left(\frac{2}{5}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{5}=0.76672$$

שאלה:

הסיכוי לעבור מבחן בהסתברות הוא $\frac{1}{3}$. מה תוחלת מספר המבחנים שיש לעשות כדי לעבור את הקורס? מהי השונות? אם הוא צריך עושה יותר מארבעה מבחנים, הסטודנט צריך להישאר עוד שנה בתואר. מה הסיכוי שהסטודנט נשאר עוד שנה?

פתרון:

משתנה X הוא מספר המבחנים שעל התלמיד לעשות. הסיכוי שיצטרך לעשות i מבחנים הוא הסיכוי שב $i-1$ פעמים הראשונות יכשל ואז בפעם הi יצליח, דהיינו

$$P(X=i)=\left(1-\frac{1}{3}\right)^{i}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2^{i}}{3^{i+1}}$$

מדובר ב"התפלגות גאומטרית". התוחלת של התפלגות כזאת היא $\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$ והשונות היא $\frac{1-\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{2}}=\frac{2}{3}\cdot 9=6$.

הסטודנט צריך יותר מארבעה מבחנים אם נכשל בארבעה הראשונים, שזה בסבירות $\left(\frac{2}{3}\right)^{4}=\frac{16}{81}$.

שאלה:

הניחו שמספר שגיאות ההקלדה בעמוד אחד מתפלג פואסונית עם $\lambda = \frac{1}{2}$. מה הסיכוי שבעמוד זה יש לפחות שגיאה אחת?

תשובה:

התפלגות מספר השגיאות X היא $P(X=i) = \frac{e^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^i}{i!}$. הסיכוי שיש לפחות שגיאה אחת הוא 1 פחות הסיכוי שאין שגיאות כלל

$$P(X \geq 1) = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.393$$

שאלה:

ישנה אוכלוסייה של זאבים בקרבת תל-חי. מעוניין לשערך את הגודל שלה. תפסו 50 זאבים וסימנו להם על האוזן השמאלית את ראשי התיבות ת"ח. שחררו את הזאבים. לאחר כמה ימים, אספו באקראי 40 זאבים. מתוכם היו 4 עם סימן ת"ח על האוזן.

א. מה לדעתכם אוכלוסיית הזאבים?
ב. בהנחה שאוכלוסיית הזאבים היא N, מה הסיכוי שבבחירת 40 זאבים, יבחרו 4 מסומנים? הראו שהסיכוי הזה הוא מקסימלי כאשר N שווה לתשובה שנתתם בסעיף א.

פתרון:

אחוז הזאבים המסומנים מתוך המדגם של 40 הזאבים הוא 10%. בהנחה שיש 50 זאבים מסומנים עדיין ושזה מדגם מייצג, צריכים להיות 500 זאבים באזור.

נגיד שישנם N זאבים. נסמן בX את מספר הזאבים המסומנים העולים במדגם של 40. אז

$$P(X=i) = \frac{\binom{50}{i}\binom{N-50}{40-i}}{\binom{N}{40}}$$

מדובר בהתפלגות "היפר-גיאומטרית". הסיכוי שיצא 4 אם כך הוא

$$P(X=4) = \frac{\binom{50}{4}\binom{N-50}{36}}{\binom{N}{40}}$$

כפונקציה של N, מדובר ב

$$f(N)=\frac{\binom{50}{4}\binom{N-50}{36}}{\binom{N}{40}}$$

ברצוננו לדעת מה נקודת המקסימום שלה. נקודת המקסימום מתקבלת אחרי עלייה ולפני ירידה. נשים לב ש

$$\frac{f(N)}{f(N-1)}=\frac{N-50}{N-86}\cdot\frac{N-40}{N}$$

אנו רוצים לנתח את אי-השוויון הבא

$$\frac{N-50}{N-86}\cdot\frac{N-40}{N}>1$$

$$(N-50)(N-40)>N(N-86)$$

$$N^2-90N+2000>N^2-86N$$

$$2000>4N$$

$$N<500$$

כלומר, הפונקציה עולה על לערך $N=500$. ממנו ואילך היא יורדת. לכן נקודת המקסימום מתקבלת ב$N=500$.

שאלה:

מטילים מטבע עם סיכוי p לעץ n פעמים. נסמן בX את מספר הפעמים שיצא עץ. מכניסים לכד כדור אדום אחד וX כדורים לבנים. מוציאים מכד זה כדור באקראי. אם יצא כדור אדום, מרוויחים 10 ₪, ואם יצא כדור לבן, מפסידים 10 ₪. חשבו את תוחלת הרווח.

תשובה:

נחשב תחילה את הסיכוי להרוויח. המשתנה $X\sim Bin(n,p)$, וכאשר $X=t$ הסיכוי להוצאת אדום הוא $\frac{1}{t+1}$. לכן הסיכוי להרוויח הוא

$$\sum_{t=0}^{n}\binom{n}{t}p^t(1-p)^{n-t}\cdot\frac{1}{t+1}$$

נשים לב ש $\frac{n+1}{t+1}\binom{n}{t}=\frac{(n+1)!}{(t+1)!(n-t)!}=\binom{n+1}{t+1}$, ולכן $\binom{n}{t}\cdot\frac{1}{t+1}=\binom{n+1}{t+1}\cdot\frac{1}{n+1}$. כלומר, הסיכוי להרוויח הוא

$$\sum_{t=0}^{n}\binom{n+1}{t+1}p^t(1-p)^{n-t}\cdot\frac{1}{n+1}=\sum_{t=1}^{n-1}\binom{n+1}{t}p^t(1-p)^{n+1-t}\cdot\frac{1}{p(n+1)}=$$

$$\left(\sum_{t=0}^{n-1}\binom{n+1}{t}p^t(1-p)^{n+1-t}-\binom{n+1}{0}(1-p)^{n+1}\right)\cdot\frac{1}{p(n+1)}=$$

$$(1-(1-p)^{n+1})\cdot\frac{1}{p(n+1)}$$

הסיכוי להפסד הוא אפ כך

$$1-(1-(1-p)^{n+1})\cdot\frac{1}{p(n+1)}$$

ואז תוחלת הרווח היא

$$10\cdot(1-(1-p)^{n+1})\cdot\frac{1}{p(n+1)}+(-10)\cdot\left(1-(1-(1-p)^{n+1})\cdot\frac{1}{p(n+1)}\right)$$

שאלה:

מערכת תקשורת מורכבת ממספר רכיבים. הסיכוי של כל רכיב לעבוד הוא p. כדי שהמערכת תעבוד, לפחות חצי מהרכיבים צריכים לעבוד. לאילו ערכי p מערכת עם חמישה רכיבים תעבוד טוב יותר ממערכת עם שלושה רכיבים?

תשובה:

הסיכוי שמערכת עם 3 רכיבים תעבוד הוא

$$p^3+3p^2(1-p)$$

הסיכוי שמערכת עם 5 רכיבים תעבוד הוא

$$p^5+5p^4(1-p)+10p^3(1-p)^2$$

נביט באי-השוויון

$$p^5+5p^4(1-p)+10p^3(1-p)^2>p^3+3p^2(1-p)$$

נחלק בp^2 ונקבל

$$p^3+5p^2(1-p)+10p(1-p)^2>p+3(1-p)$$

$$p^3-p+5p^2(1-p)+10p(1-p)^2-3(1-p)>0$$

$$p(p-1)(p+1)+5p^2(1-p)+10p(1-p)^2-3(1-p)>0$$

המספר $1-p$ חיובי, ולכן ניתן לחלק בו בלי לשנות את אי-השוויון

$$-p(p+1)+5p^2+10p(1-p)-3>0$$

$$-6p^2+9p-3>0$$

$$(2p-1)(1-p)>0$$

מכיוון ש $1-p$ חיובי, מקבלים ש

$$p>\frac{1}{2}$$

כלומר, לרכיב צריך סיכוי של לפחות חצי לעבוד כדי שמערכת עם חמישה רכיבים תהיה עדיפה על שלושה.

שאלה:

שתי קבוצות כדורגל משחקות סדרת משחקים עד שאחת מהן מנצחת בשני משחקים. קבוצה א מנצחת כל משחק בסבירות p. מצאו את תוחלת ושונות מספר המשחקים. הראו שתוחלת מספר המשחקים מקסימלית אם $p=\frac{1}{2}$.

תשובה:

מספר המשחקים X האפשרי הוא 2 או 3. הסיכוי שהוא 2 הוא $p^2+(1-p)^2$, והסיכוי שהוא 3 הוא המשלים, דהיינו $1-(p^2+(1-p)^2)=2p-2p^2$. אי-לכך, תוחלת מספר המשחקים היא

$$E(X)=2\cdot(2p^2-2p+1)+3\cdot(2p-2p^2)=-2p^2+2p+2$$

את השונות נחשב גם כן

$$E(X^2)=4(2p^2-2p+1)+9(2p-2p^2)=-10p^2+10p+4$$

$$V(X)=-10p^2+10p+4-(-2p^2+2p+2)^2$$

נשים לב שהתוחלת כפונקציה של p היא פרבולה בוכה. נקודת הקיצון שלה (שהיא נקודת המקסימום) מתקבלת כאשר

$$-4p+2=0$$

$$p=\frac{1}{2}$$