תרגיל 2 אלגברה לינארית למורים תש"ף פתרון בלבד

9 ביוני 2020

1. נדרג את המטריצות, לא תמיד לפי אלגורתים גאוס בשביל שהחישוב יהיה יותר קל.

(א)

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 2 & 3 & 18 \\ 12 & 13 & 5 & 5 & 34 \\ 11 & 11 & 5 & 5 & 30 \\ 11 & 11 & 3 & 5 & 28 \\ 24 & 25 & 9 & 10 & 66 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - 2R_2} \begin{pmatrix} 7 & 7 & 2 & 3 & 18 \\ 12 & 13 & 5 & 5 & 34 \\ 11 & 11 & 5 & 5 & 30 \\ 11 & 11 & 3 & 5 & 28 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - R_4]{R_2 \leftarrow R_2 - R_4} \begin{pmatrix} 7 & 7 & 2 & 3 & 18 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 11 & 11 & 3 & 5 & 28 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 6 \\ 7 & 7 & 2 & 3 & 18 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 11 & 11 & 3 & 5 & 28 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4 \leftarrow R_4 - 11R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 7R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -7 & -12 & 3 & 24 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -11 & -19 & 5 & 38 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow \frac{1}{2}R_3]{R_2 \leftrightarrow R_5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -11 & -19 & 5 & 38 \\ 0 & -7 & -12 & 3 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_5 \leftarrow R_5 - 7R_2]{R_4 \leftarrow R_4 - 11R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 5 & 60 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & 38 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_5 \leftarrow R_5 + 5R_3]{R_4 \leftarrow R_4 + 8R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 68 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 43 \end{pmatrix}$$

2

$$\xrightarrow[R_5 \leftarrow \frac{1}{3}R_5]{R_4 \leftarrow \frac{1}{5}R_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{68}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{43}{3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_5\leftarrow R_5-R_4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{68}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{15} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_5\leftarrow \frac{15}{11}R_5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{68}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2\leftarrow R_2+2R_5,\, R_1\leftarrow R_1-6R_5]{R_4\leftarrow R_4-\frac{68}{5}R_5,\, R_3\leftarrow R_3-R_5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_1\leftarrow R_1-2R_3]{R_2\leftarrow R_2+2R_3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\leftarrow R_1+2R_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\leftarrow -R_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ב)

$$\begin{pmatrix} i & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 1-2i & 5+i & 3i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + iR_1} \begin{pmatrix} i & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} i & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_1 \leftarrow -iR_1]{R_3 \leftarrow -\frac{1}{6}R_3} \begin{pmatrix} 1 & -2i & i & 3i \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_1 \leftarrow R_3 - 3iR_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 6R_3} \begin{pmatrix} 1 & -2i & i & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 + 2iR_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11i & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ג)

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & 6 \\ 3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow -\frac{1}{12} R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 6R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. נפתור את המערכת הבאה, ע"י דירוג המטריצה שמייצגת את המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 6 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 6 & 6 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 6 & 6 \\ 0 & 2 & -23 & -21 \\ 0 & 2 & -13 & -12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 6 & 6 \\ 0 & 2 & -23 & -21 \\ 0 & 0 & 10 & 9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2 \leftarrow \frac{1}{2} R_2]{R_3 \leftarrow -\frac{1}{10} R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 6 & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{23}{2} & -\frac{21}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{10} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_1 \leftarrow R_1 - 6R_3]{R_2 \leftarrow R_2 + \frac{23}{2} R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{6}{10} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{20} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{10} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 + \frac{1}{2} R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{21}{40} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{20} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{10} \end{array}\right)$$

ולכן הפתרון הוא $x = \frac{21}{40}, y = -\frac{3}{20}, z = \frac{9}{10}$.

3. נפתור את המערכת הבאה, ע"י דירוג המטריצה שמייצגת את המערכת:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 6 & -2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \leftarrow R_4 - 2R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1,\, R_3 \leftarrow R_3 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

וקיבלנו שורת סתירה ולכן אין פתרון למערכת.

4. נדרג את המטריצה שמייצגת את המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & c & 0 \\ 6 & c & 2c+1 & 1 \\ 9 & 3 & c^2+3 & c-1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & c & 0 \\ 0 & c-2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c^2-3c+3 & c-1 \end{array}\right)$$

כעת, אם $c-2 \neq 0, c^2-3c+3 \neq 0$ אזי קיבלנו צורה מדורגת, ללא שורת סתירה וללא משתנים חופשיים ולכן יהיה פתרון יחיד.
אם $c-2=0$ (כלומר $c=2$) נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

והגענו לצורה מדורגת, ללא שורת סתירה ועם משתנה חופשי (המשתנה השלישי) ולכן יהיו אינסוף פתרונות.
ובנוסף, לא ייתכן $c^2-3c+3=0$ כי אחרת $c=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot 3}}{2}$.

5. נדרג את המטריצה שמייצגת את המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & c & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & c & 5 \\ 0 & 2 & 6-2c & -4 \end{array}\right)$$

הגענו לצורה מדורגת, ללא שורת סתירה ועם משתנה חושפי (המשתנה השלישי) ולכן תמיד יהיו אינסוף פתרונות.