תרגיל 11

1. ענו על הסעיפים הבאים:

(א) יהי X מרחב טופולוגי דיסקרטי עם בסיס B. הוכיחו שלכל $x \in X$, $\{x\} \in B$.

(ב) יהי X מרחב טופולוגי דיסקטי. תהא $f : X \to Y$ פונקציה על. הוכיחו כי טופולוגית המנה על Y היא הדיסקטית.

(ג) יהי X מרחב טופולוגי עם בסיס B, Y קבוצה, ו$f : X \to Y$ פונקציה על. הוכיחו/הפריכו: $B' = \{O \subseteq Y : f^{-1}(O) \in B\}$ הוא בסיס לטופולוגיית המנה על Y.

(ד) יהי $\mathbb{R}_l$ הישר של סורגנפריי, ו$f : \mathbb{R}_l \to \mathbb{Z}$ פונקציית הערך השלם (שהיא על). מהי טופולוגיית המנה של $\mathbb{Z}$ ביחס לf?

2. נתבונן ב$\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית, וב$f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ פונקציית הערך השלם התחתון $f(x) = \lfloor x \rfloor$. נסמן בτ את טופולוגיית המנה על $\mathbb{Z}$ ביחס לf.

(א) הוכיחו שמתקיים: $O \in \tau \iff [\forall n \in \mathbb{Z} : (n \in O \Rightarrow n-1 \in O)]$.

(ב) הסיקו כי $\tau = \{\mathbb{Z}, \emptyset\} \cup \{(-\infty, M] \cap \mathbb{Z}\}_{M \in \mathbb{Z}}$

3. ענו על הסעיפים הבאים:

(א) יהיו X, Y מרחבים מטריים, ו $f : X \to Y$ ו$g : Y \to X$ פונקציות רציפות, כך ש $f \circ g = id_Y$. הוכיחו כי f העתקת מנה.

(ב) תהי $f : X \to Y$ העתקת מנה. הוכיחו שf הומיאומורפיזם $\iff$ f חח"ע.

4.

(א) נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{R}^2$ ע"י: $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1 + y_1^2 = x_2 + y_2^2$. הוכיחו ש $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2/\sim$. רמז: מצאו את ההעתקה ההפוכה ל$\hat{f}$ מ$\mathbb{R}$ ל$\mathbb{R}^2/\sim$.

(ב) נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{R}^2$: $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \iff (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$.
למה הומיאומורפי $\mathbb{R}^2/\sim$?

5. יהי X מרחב המנה של $\mathbb{R}$ המתקבל ע"י זיהוי כל הנקודות מנורמה גדולה שווה מ1. כלומר $x \sim x'$ אמ"ם $x = x'$, או ש $|x| \geq 1 \wedge |x'| \geq 1$. הוכיחו ש $X \cong S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

6. תנו דוגמא להעתקת מנה שהיא לא פתוחה ולא סגורה.