

משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון

משוואה דיפרנציאלית כללית מסדר ראשון: $F(x, y, y') = 0$
צורתה הנורמלית של משוואה דיפרנציאלית כללית מסדר ראשון: $y' = F(x, y)$.
בעיית קושי – משוואה כנ"ל ביחד עם תנאי התחלה: $y(x_0) = y_0$.

משפט קיום ויחידות עבור משוואות מסדר ראשון

תהי בעיית קושי בצורה הנורמלית:

$$\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

כאשר $F(x, y)$ רציפה בתחום:

$$D := \{|x - x_0| \leq \alpha, |y - y_0| \leq \beta\}$$

ומקיימת את תנאי ליפשיץ ב y – לכל x .

אזי, קיים פתרון אחד ויחיד לבעיית קושי בתחום

$$|x - x_0| \leq \min \left\{ \alpha, \frac{\beta}{M} \right\}, \quad M = \max\{f(x, y)\}$$

משוואות מסדר ראשון שאנו יכולים לפתור

1. $y' = f(x)$

$$y' = f(x) \Rightarrow y(x) = \int_{x_0}^x f(x) dx + y_0$$

2. משוואה לינארית הומוגנית מסדר ראשון:

$$y' = f(x) \cdot y \Rightarrow y(x) = y_0 \cdot e^{\int_{x_0}^x f(x) dx}$$

דוגמה:

$$\begin{cases} y' = k \cdot y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

כלומר:

$$y(x) = y_0 \cdot e^{\int_{x_0}^x k dx} = y_0 \cdot e^{k(x-x_0)}$$

3. משוואה הניתנת להפרדה :

$$y' = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

דוגמה :

משוואה לינארית הומוגנית מסדר ראשון :

$$y' = f(x) \cdot y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int f(x) dx$$

נחשב :

$$\log |y| = \int f(x) dx + C$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{\int f(x) dx + C} = e^{\int f(x) dx} \cdot e^C = K \cdot e^{\int f(x) dx}$$

דוגמה – חוק הצינון של ניוטון

בחדר בטמפרטורה אחידה של 20°C יש כוס עם טמפרטורה התחלתית של 100°C .
נגזרת פונקציית זמן הצינון היא :

$$T'(t) = u \cdot (20 - T), \quad u \in \mathbb{R}$$

יש למצוא את $T(t)$.

נשתמש בהפרדה (משוואות מסוג 3) :

$$\frac{dT}{dt} = u \cdot (20 - T)$$

$$\frac{dT}{20 - T} = u dt$$

$$\int \frac{dT}{20 - T} = \int u dt$$

$$-\log|20 - T| + C = \int u dt$$

$$|20 - T| = e^{-\int u dt + C} = e^{-ut} \cdot e^C = K \cdot e^{-ut}$$

$$\Rightarrow 20 - T = K \cdot e^{-ut}$$

$$\Rightarrow T = K \cdot e^{-ut} + 20$$

כעת נוכל לחשב את הקבוע לפי הנתון $T(0) = 100$:

$$100 = K \cdot e^{-u \cdot 0} = K + 20$$

$$\Rightarrow K = 80$$

סך הכל :

$$\boxed{T(t) = 80 \cdot e^{-u \cdot t} + 20}$$

הערה

אפשר לראות שכש $t \rightarrow \infty$ הפונקציה T שואפת ל -20°C - טמפרטורת החדר.

כלומר לאחר הרבה זמן, טמפרטורת כוס הקפה תהיה כמעט זהה לטמפרטורת החדר בו מונח ספל הקפה.