אלגברה לינארית 2 | חוברת תרגילים של קווין מנדלבאום

קווין מנדלבאום | הצעת פתרון של יונתן סמידוברסקי

חלק 3: צורות ז'ורדן

(שאלה 1)

<u>הוכחה</u>

$\Leftarrow$: יהיו A, B נראה שיש להן אותה צורת ז'ורדן.

תהי $J(A)$ צורת הז'ורדן של A, ותהי Q מטריצה הפיכה כך ש$Q^{-1}BQ = A$

בנוסף, קיימת P כך ש$P^{-1}AP = J(A)$.

כעת

$$(PQ^{-1})B(QP) = J(A)$$

ולכן זו צורת הז'ורדן שלה (המטריצה המז'רדנת היא QP)

$\Rightarrow$: אם יש להן אותה צורת ז'ורדן אזי קיימות P, Q כך ש$P^{-1}AP = J(A) = J(B) = Q^{-1}AQ$

ואז $A = (PQ^{-1})A(QP^{-1})$ ולכן הן דומות.

(שאלה 2)

<u>(א) הוכחה</u> תהיינה $A, B \in \mathbb{C}^{3*3}$ כך שיש לנו אותו פולינום אופייני ומינימלי.

נחלק למקרים לפי כמות הע"ע:

<u>**3 ע"ע**</u> אזי הפולינום האופייני והמינימלי מתפרקים לגורמים לינאריים שונים, שתיהן לכסינות ודומות לאותה מטריצה אלכסונית,

קל להראות שלכן הן גם דומות (בדומה למה שעשינו בשאלה 1)

<u>**2 ע"ע**</u> $p_A(x) = (x-a)(x-b)^2 = p_B(x)$

ערך עצמי/תכונה	ר"א	ר"ג	חזקה בפ"מ
a	1	1	1
b	2	2/1	$1/2 \Rightarrow$

ובכל מקרה, נתונים אלה מספיקים ובשני המקרים- אותה צורת ז'ורדן ולכן דומות.

<u>**ע"ע אחד ויחיד**</u> ואז $p_A(x) = (x-a)^3 = p_B(x)$

ואז מחלקים למקרים לפי החזקה בפולינום המינימלי, זה מספיק כדי להראות צורת ז'ורדן יחידה ולכן דומות.

(ב) הפרכה

לוקחים

$$A = J_3(1) \oplus J_2(1) \oplus J_2(1)$$

$$B = J_3(1) \oplus J_3(1) \oplus J_1(1)$$

קל לראות שהחזקה של 1 בפולינום המינימלי זהה, והריבוי האלגברי גם כן, אותו פ"מ ופ"א וצורת ז'ורדן שונה, לכן לא דומות.

(שאלה 3)

תשובה

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 3 \\ -9 & -7 & -4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}, J(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, J(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(שאלה 4)

$p_A(x) = (x-3)^5(x+5)^3$, כמו כן נתון הריבוי הגיאומטרי של 3 הוא 4.

ע"ע/תכונה	ר"א	ר"ג	חזקה בפ"מ
3	5	4	?
5	3	?	?

בעצם ברור שישנם 4 בלוקים של 3, 3 בגודל 1 ועוד 1 בגודל 2.

זה מותיר אותנו עם האפשרויות

$$J(A) = J_2(1) \oplus J_1(1) \oplus J_1(1) \oplus J_1(1) \oplus J_1(3) \oplus J_1(3) \oplus J_1(3)$$

$$J(A) = J_2(1) \oplus J_1(1) \oplus J_1(1) \oplus J_1(1) \oplus J_2(3) \oplus J_1(3)$$

$$J(A) = J_2(1) \oplus J_1(1) \oplus J_1(1) \oplus J_1(1) \oplus J_3(3)$$

(שאלה 5)

תהי מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n*n}$ הפיכה, נוכיח שקיימת B כך ש$B^2 = A$
(ראה "שורש של מטריצה הפיכה" ב$math - wiki$)

(שאלה 6)

צ"ל מטריצה היא לכסינה אם"ם הפ"מ ממל"ש
הוכחה מטריצה A לכסינה $\iff$ בצורת הז'ורדן שלה הבלוקים מגודל 1
$\iff$ החזקות בפולינום המינימלי הם 1. כלומר, הפולינום המינימלי מתפרק לגורמים ליניאריים שונים.

(שאלה 7)

תהי $A \in \mathbb{C}^{n*n}$ המקיימת $A^4 = -A^2$
(סעיף א') לA יש לכל היותר 3 ע"ע
הוכחה $p(x) = x^4 + x^2 = x^2(x+i)(x-i)$
ומתקיים $m_A(x) \in \{x, x-i, x+i, x^2, x(x-i), x(x+i), (x-i)(x+i), x(x-i)(x+i), x^2(x+i)(x-i)\}$
שורשי הפולינום המינימלי מכילים את כל הערכים העצמיים ובכל מקרה לכל היותר 3 שורשים.
(סעיף ב') אם A לכסינה אז $A^3 = -A$
אם A לכסינה הפולינום האופייני מתפרק לגורמים ליניאריים שונים

$$m_A(x) \in \{x, x-i, x+i, x(x-i), x(x+i), (x-i)(x+i), x(x-i)(x+i)\}$$

ולכן בכל מקרה הפולינום המינימלי מחלק את $x^3 + x$
ולכן $A^3 + A = 0$ כלומר $A^3 = -A$.
(סעיף ג') $A \in \mathbb{C}^{3*3}$ ואינה לכסינה, מצא צורות ז'ורדן האפשריות
הפולינום המינימלי אינו מל"ל ולכן

$$m_A(x) \in \{x^2, x^2(x+i)(x-i)\}$$

האפשרות הראשונה

$$J(A) = J_2(0) \oplus J_1(0)$$

והאפשרות השנייה לא יכולה להתקיים בסדר $3*3$ משום שמעלת הפולינום גדולה מ3.