תרגיל:

מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציה:

$$f\left(x,y,z\right)=\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z$$

בכדור: $B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2+z^2\le 2\right\}$.

פתרון:

בדומה לתרגילים קודמים, נחפש קודם נקודות חשודות בתוך התחום (נשווה $\nabla f=0$) ולאחר מכן בשפת התחום (נשווה $\nabla L=0$).

אם כן, נשווה $\nabla f=0$ ונקבל:

$$\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{3}\right)=(0,0,0)$$

וכמובן אין פתרון.

על שפת התחום, נחפש נקודות חשודות בעזרת כופלי לגראנז'.

הלגראנז'יאן היא:

$$L\left(x,y,z,\lambda\right)=f+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-2\right)$$

נשווה $\nabla L=0$:

$$\begin{cases} L_x=\sqrt{2}+2\lambda x=0 \\ L_y=\sqrt{2}+2\lambda y=0 \\ L_z=\sqrt{3}+2\lambda z=0 \\ L_\lambda=x^2+y^2+z^2-2=0 \end{cases}$$

משלוש המשוואות הראשונות נקבל:

$$x=y=-\frac{\sqrt{2}}{2\lambda},z=-\frac{\sqrt{3}}{2\lambda}$$

נציב זאת במשוואת האילוץ:

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2\lambda}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2\lambda}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2\lambda}\right)^2-2=0$$

ונקבל $\lambda=\pm\sqrt{\frac{7}{8}}$.

נקבל את הנקודות: $\left(-\sqrt{\frac{4}{7}},-\sqrt{\frac{4}{7}},-\sqrt{\frac{6}{7}}\right),\left(\sqrt{\frac{4}{7}},\sqrt{\frac{4}{7}},\sqrt{\frac{6}{7}}\right)$.

נבדוק מהם ערכי f בנקודות אלו:

$$f\left(\sqrt{\frac{4}{7}},\sqrt{\frac{4}{7}},\sqrt{\frac{6}{7}}\right)=\sqrt{14},f\left(-\sqrt{\frac{4}{7}},-\sqrt{\frac{4}{7}},-\sqrt{\frac{6}{7}}\right)=-\sqrt{14}$$

ולכן $\left(-\sqrt{\frac{4}{7}},-\sqrt{\frac{4}{7}},-\sqrt{\frac{6}{7}}\right)$ מינימום, $\left(\sqrt{\frac{4}{7}},\sqrt{\frac{4}{7}},\sqrt{\frac{6}{7}}\right)$ מקסימום.