11 | 3 | 2018

גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית

תרגול...

מס' -②-

תזכורת: לכסון אורתוגונלי:

מטרה: בהינתן מטריצה סימטרית S, רוצים למצוא מטריצה אורתוגונלית T ומט' אלכסונית Δ כך ש:

$$P^{-1}\cdot S\cdot P = \Delta$$

אלגוריתם: תהי S מט' סימטרית אז:

① - נפתור את המשוואה:

$$|S-\lambda I| = 0$$

הפתרונות הם הערכים העצמיים: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

② - עבור כל λ_i, נמצא בסיס אורתונורמלי עבור מרחב האפס ~~של~~ עבור: $Null(S-\lambda_i I)$:

1) - נדרג דירוג מלא את $S-\lambda_i I$.

2) - נפתור את המערכת ההומוגנית המתאימה, ונקבל בסיס $\{v_i\}$.

3) - עבור הבסיס $\{v_i\}$ בשלב 2, נבצע תהליך גרם-שמידט:

$$u_n = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{Proj_{u_i}(v_n)}_{\text{היטל}} =$$

$$= v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle u_i, v_n\rangle}{\langle u_i, u_i\rangle}\cdot u_i$$

(כמובן $u_1=v_1$).

4) - ננרמל כל אחד מהווקטורים. (נחלק אותו באורך שלו).

③ - את כל הווקטורים העצמיים שהתקבלו משלבים ② - 4 נשים במטריצה P. את λ_i נשים בהתאמה באלכסון של מטריצה: Δ.

תרגיל: לכסן אורתוגונלית את:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

פתרון:

שלב I:

$$\begin{vmatrix} 2-x & -1 & -1 \\ -1 & 2-x & -1 \\ -1 & -1 & 2-x \end{vmatrix} =$$

$$= (2-x)^3 - 1 - 1 - [3(2-x)]$$

$$= (2-x)^3 - 2 - 6 + 3x.$$

$$= \cancel{8} - 12x + 6x^2 - x^3 \cancel{-8} + 3x.$$

$$= -x^3 + 6x^2 - 9x = -x[x^2 - 6x + 9]$$

$$= -x \cdot [x-3]^2$$

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 3.$$

$$\Downarrow$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

שלב II:

$$S - \lambda_1 I = S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 0$$

נדרג. $\Downarrow$

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \end{array}$$

$$\leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{c} x - z = 0 \\ y - z = 0 \\ \Downarrow \\ x = y = z. \end{array}$$

....

נבחר $z=1$ ונקבל:

$z=1$:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

ננרמל ונקבל:

$$u_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$$

$\lambda_2=3$:

$$S-\lambda_2 I=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$-x-y-z=0.$$
$$z=-(x+y).$$

נבחר:

$$\{v_i\}=\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}}_{=v_1},\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}_{=v_2}\right\}$$

גרם-שמידט:

$$u_1=v_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},$$

$$u_2=v_2-\frac{\langle u_1,v_2\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}\cdot u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\\-\frac12\\-\frac12\end{pmatrix}$$

נרמול:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}/\sqrt{2}} \\ \frac{-1/2}{\sqrt{3/2}} \\ \frac{-1/2}{\sqrt{3/2}} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

$$\Downarrow$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

בדיקה:

$$P^t \cdot S \cdot P \overset{?}{=} \Lambda$$

....

מיון חתכי חרוט:

חתך חרוט: $\boxed{ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0}$

המטרה לזהות אם זה מעגל, פרבולה, היפרבולה, אליפסה...
והמקרים המנוונים.. ישר..

איך נחליט לאיזו צורה מתאימה המשוואה?

שלב I: נעביר את המשוואה לצורה אלכסונית, כלומר בלי גורם ~~xy~~ xy.

או - ניצור מטריצה $S=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

(א) - נלכסן אורתוגונלית את S, כלומר נמצא מטריצה אורתוגונלית P, ומטריצה אלכסונית: $\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

כך ש: $P^{-1}\cdot S\cdot P=\Lambda$

(ב) - הצורה האלכסונית היא,

$$\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+d'\cdot x'+e'\cdot y'+f=0.$$

כאשר:

$$(d' \quad e')=(d \quad e)\cdot P.$$

שלב II:

(*) - אם $\lambda_1=\lambda_2=0$ נקבל קו ישר.

ישר: $d'x'+e'y'+f=0$.

(*) - אם $\lambda_2\neq 0,\ \lambda_1=0$.

$d'\neq 0$: יתקבל פרבולה. כדי לזהות צורה קנונית נעשה השלמה לריבוע.

$d'=0$: 2 קווים מקבילים / קו ישר / $\emptyset$
ויופיעו בהתאם למספר הפתרונות של $\lambda_2(y')^2+e'y'+f=0$.

(*) - אם $\lambda_2=0$ – $\lambda_1\neq0$ בדיוק המשתנה הריבועי
רק עם יש במונח d'.

(*) - אם $\lambda_1\neq0,\ \lambda_2\neq0$.
דבר ראשון נבצע שתי השלמות לריבוע (אחת עבור x' ואחת עבור y').

קיבלנו:

$$\lambda_1(x'')^2+\lambda_2(y'')^2+f''=0.$$

אם ל- λ_1,λ_2 סימן שונה.
- $f''=0$ שני ישרים נחתכים.
- $f''\neq0$ היפרבולה.

אם ל- λ_1,λ_2 אותו סימן:
נניח ששניהם חיוביים:
- $f''=0$ נקודה:
- $f''>0$ $\emptyset$.
- $f''<0$ אליפסה.

<u>תרגילים:</u>

① - למיין את: $x^2-2x+y^2+13=0$
ולמצוא צורה קנונית.

$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$
$(1-\lambda)^2=0$

<u>פתרון:</u> אין xy, אז כבר צורה אלכסונית.

$\lambda_1=1\ ,\ \lambda_2=1$

נעשה השלמה לריבוע:

$x^2-2x+y^2+13=0$

$$(x-1)^2+y^2+12=0.$$

נסמן:

$$x''=x-1$$
$$y''=y.$$

$$\boxed{(x'')^2+(y'')^2+12=0}$$

כלומר זה $\emptyset$.

ת.ס

② — למיין זאת:

ולמצוא צורה קנונית.

$$2x^2+y^2+3y=0.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2-\lambda)(1-\lambda)$$

פתרון: כבר אלכסוני.

$$\lambda_1=2,\ \lambda_2=1.$$

$$2x^2+y^2+3y=0.$$

$$2x^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}=0.$$

$$x''=x$$
$$y''=y+\frac{3}{2}.$$

$$\boxed{2(x'')^2+(y'')^2-\frac{9}{4}=0.}$$

אליפסה.

③ — למיין את: $x^2-2xy+y^2+y=0$ ולמצוא צורה קנונית.

פתרון: לכסון אלכסוני.

$$S=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}.$$

$$S-\lambda I=\begin{pmatrix}1-\lambda&-1\\-1&1-\lambda\end{pmatrix}\overset{\text{ב.ג}}{\Longrightarrow}|S-\lambda I|=(1-\lambda)^2-1=0.$$

$$\lambda-1=\pm1.$$

$$\Lambda=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}\Leftarrow\quad \lambda_2=2 \quad \lambda_1=0$$

$\lambda_1=0$:

$$S-0I=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow x-y=0$$

נקח וקטור $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{נרמול}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$

$\lambda_2=2$:

$$S-2I=\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow -x-y=0$$

נבחר: $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{נרמול}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ -\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}.$

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}&\frac{-1}{\sqrt2}\end{pmatrix}.$$

Scanned by CamScanner

$$\begin{pmatrix} d' & e' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underset{d'}{\underset{\shortparallel}{\frac{1}{\sqrt2}}} & \underset{e'}{\underset{\shortparallel}{-\frac{1}{\sqrt2}}} \end{pmatrix}$$

לכן בצורה האלכסונית:

$$0(x')^2 + 2(y')^2 + \frac{1}{\sqrt2} x' - \frac{1}{\sqrt2} \cdot y' = 0 .$$

$\frac{1}{\sqrt2} \neq 0$. לכן זו פרבולה.

עבור צורה קנונית נבצע השלמה לריבוע:

$$2(y')^2 - \frac{1}{\sqrt2} y' + \frac{1}{\sqrt2} \cdot x' = 0$$

$$2 \cdot \left((y')^2 - \frac{1}{2\sqrt2} y' \right) + \frac{1}{\sqrt2} x' = 0 .$$

$$2 \cdot \left(y' - \frac{1}{4\sqrt2} \right)^2 - \frac{1}{32} + \frac{1}{\sqrt2} x' = 0 .$$

$x'' = x'$

$y'' = y' - \frac{1}{4\sqrt2}$.

$\Downarrow$

5 נק'

$$\boxed{2(y'')^2 + \frac{1}{\sqrt2} \cdot x'' - \frac{1}{16} = 0}$$

פרבולה.

ס.ג.

$$2y^2 + \frac{1}{\sqrt2} x - \frac{1}{16} = 0$$

4 - (ממבחן שנה שעברה).

נתונה תבנית ריבועית:

$$Q(x,y) = -3x^2 + 4xy - 6y^2$$

עקומה מישורית מוגדרת ע"י: $Q(x,y) = -1$, זהו את העקומה.

פתרון: שאלה 4:

$$-3x^2 + 4xy - 6y^2 + 1 = 0$$

נסמן:

$$S = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$|S - \lambda I| = \begin{vmatrix} -3-x & 2 \\ 2 & -6-x \end{vmatrix} = (x+3)(x+6) - 4.$$

$$= x^2 + 9x + 14 \quad (x+7)(x+2)$$

$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = -7$.

יש לשים לב שלא צריך לחשב את P כי

$(d \quad e) = (0 \quad 0)$ אז $(d' \quad e') = (0 \quad 0)$

$$-2(x')^2 - 7(y')^2 + 1 = 0.$$

$$2(x')^2 + 7(y')^2 - 1 = 0.$$

זהו אליפסה.

5 – למצוא צורה קנונית ולסווג:

$$xy-2x-6y+18=0.$$

פתרון: שלב 1:

$$S=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

$$|S-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\lambda & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\lambda\end{vmatrix}\Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm\frac{1}{2}.$$

$\lambda_1=\frac{1}{2}$:

$$S-\frac{1}{2}I=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

$$y=x.$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\xleftarrow{\text{נרמול}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$\lambda_2=-\frac{1}{2}$:

$$S+\frac{1}{2}I=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\xleftarrow{\text{נרמול}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\Leftarrow y=-x.$$

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

המשך

$$= \begin{pmatrix} -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-8}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underset{d'}{\underset{\shortparallel}{-4\sqrt{2}}} & \underset{e'}{\underset{\shortparallel}{2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}.$$

$$\frac{1}{2}(x')^2 - \frac{1}{2}(y')^2 - 4\sqrt{2}\,x' + 2\sqrt{2}\,y' + 10 = 0. \quad /\cdot 2.$$

$$(x')^2 - 8\sqrt{2}\,x' - (y')^2 + 4\sqrt{2}\,y' + 24 = 0.$$

$$(x' - 4\sqrt{2})^2 - 32 - (y' - 2\sqrt{2})^2 + 8 + 24 = 0$$

$$x'' = x' - 4\sqrt{2}$$
$$y'' = y' - 2\sqrt{2}.$$

$$\boxed{(x'')^2 - (y'')^2 = 0}$$

זוג ישרים נחתכים