4/3/2018

גיאומטריה דיפרנציאלית

מרצה...

מס' 1

מרצה:
דורון פרלמן:
מייל:
doron65536@gmail.com
0525-350660.

שעות קבלה: יום א' – $14 \to 15$

בעזרת ה' קורס בגאומטריה תוך שימוש בכתיב של אינשטיין.

[מטרה: ללמוד משטחים במרחב].

היום נלמד על טנזורים:

כמה מוסכמות:

1 – כל הוקטורים הם וקטורי עמודה. למשל: $v=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

⇐ וקטור שורה יסומן v^t.

2 – קורדינטות של וקטור למעלה: למשל: $v=\begin{pmatrix}v^1\\v^2\\v^3\end{pmatrix}$.

3 – וקטור מתוך קבוצה, האינדקס למטה.

$$X=\{v_1, v_2, v_3\}$$

4 – כאשר יש אותו אינדקס למעלה ולמטה אז יש סכימה על האינדקס הזה (נקרא הסכמה של אינשטיין).

דוגמא: $\mathbb{R}^3$ עם הבסיס הסטנדרטי.

$$\{e_1, e_2, e_3\}$$

יהי וקטור

$$v=\begin{pmatrix}v^1\\v^2\\v^3\end{pmatrix}$$

$$v=\sum_{i=1}^{3} v^i \cdot e_i \underset{\text{אינשטיין}}{\equiv} v^i \cdot e_i$$

אז: $v^i e_i$ זהו יודעים שיש סכימה על אינדקס i.

$$\left.\begin{array}{r} \text{סכימה} - i. \\ \text{חופשי} - \phi. \end{array}\right\} \longrightarrow \sum_i v^i e_i$$

דוג': עם רכיבים חופשיים.

$$v^i e_i \cdot u_j w_j$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{סכימה}: i. \\ \text{חופשי}: j. \end{array}\right\} \longrightarrow \sum_i v^i e_i u_j \cdot w_j =$$

[כי לא מופיע למעלה ולמטה].

$$= u_j \cdot w_j \sum_i v^i \cdot e_i$$

5 – מטריצות: איבר בשורה i ועמודה j. מאלגברה לינארית: a_{ij}. זה $\cancel{a^i_j}$ לא מוגדר. אלא רושמים a^i_j.

$i \leftarrow$ שורה, $j \leftarrow$ עמודה.

המטריצה שאיברה הוא a_{ij} או a^i_j היא (a_{ij}) או בהתאמה (a^i_j).

6 – יש כופפים ( ) – היא: $(a^i_j) \equiv (a_{ij})$. (a^{ij}).

דוג': מערכת משוואות לינאריות:

$$A\cdot X = b \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ \vdots & & \\ a^m_1 & \cdots & a^m_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}$$

x: וקטור משתנים.

b: וקטור פתרונות.

$$b^1 = a^1_1 \cdot x^1 + a^1_2 \cdot x^2 + \dots + a^1_n \cdot x^n$$

$$b^1 = \sum_{i=1}^{n} a^1_i \cdot x^i \equiv a^1_i \cdot x^i$$

אינשטיין.

באותו אופן:

$$b^j = a^j_i \cdot x^i$$

סכימה: i.

חופשי: j.

(7) – **מט' יח':**

$$\delta_{ij} = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \equiv I$$

מט' יח'.

$$\text{מט' יח'} = \left(\delta^i_j\right)$$

תרגיל: לפשט את הביטוי, (ממקמן).

$$\delta_{ij} u^i v^j$$

סכימה: i, j

חופשי: ϕ.

$$\sum_i \sum_j \delta_{ij} u^i v^j =$$

עבור $i \neq j$ כל כולם.

$$= \sum_i u^i \cdot v^i$$

מש

Scanned by CamScanner

תרגול 2: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$.

$$u=\begin{pmatrix}u^1\\u^2\\\vdots\\u^n\end{pmatrix},\quad v=\begin{pmatrix}v^1\\v^2\\\vdots\\v^n\end{pmatrix}$$

מכפלה פנימית של u,v:

$$\langle u,v\rangle = u^1\cdot v^1+\dots+u^n\cdot v^n=\sum_i u^iv^i$$

אם אפשר להוריד את ה-Σ לפי איינשטיין, יחד עם
אז, לפי תרגיל קודם:

$$\equiv \delta_{ij}u^iv^j$$

(8) מט' V-פונקציות לינאריות:

$$A(v)=A\cdot v$$

נסמן: (a^i_j).

מט' תבניות בילינאריות:

$$B(u,v)=u^t\cdot B\cdot v$$

וכו' נסמן ע"י (a_{ij}).

הבדל: כפל מט':

$$a^i_j v^j$$

וקטור בילינארית:

$$B\cdot v=\begin{pmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&&\\b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^1\\\vdots\\v^n\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}b_{11}\cdot v^1+\dots+b_{1n}\cdot v^n\\\vdots\\b_{n1}\cdot v^1+\dots+b_{nn}\cdot v^n\end{pmatrix}$$

$$u^t = (u^1, \dots, u^n)$$

$$(u^t)(Bv) = b_{11} u^1 \cdot v^1 + \dots + b_{1n} \cdot u^1 \cdot v^n + \dots + b_{n1} \cdot u^n \cdot v^1 + \dots + b_{nn} u^n \cdot v^n =$$

$$= \sum_i \sum_j b_{ij} u^i \cdot v^j \equiv b_{ij} u^i v^j$$

אינשט׳

9. a^i_i – נזכיר כלל רישום אינשטיין.

דוג׳:

1. $a^i_i = \sum_i a^i_i \equiv tr(A)$

סכימה – i
חופשי – ϕ.

2. –

a^i_i

סכימה: ϕ.
חופשי: i.

כי פשוט מדובר באיברים i,i של המט׳ (a^i_j).

תרגיל: (מסוג שיש במבחן).

לפשט:

$\delta^i_j \cdot \delta^j_k$

סכימה – j
חופשי – i, k.

$$\left[\sum_j \delta^i{}_j \cdot \delta^j{}_k\right]$$ בעצם השוה:

של רפיונות:

$$\delta^i{}_{\cancel{j}}\,\delta^{\cancel{j}}{}_k = \delta^i{}_k$$

תרגיל: להוכיח כי כפל מט' הוא אסוציאטיבי.

פתרון: צריך להוכיח ש: $(AB)\cdot C = A(BC)$

האיבר ה- i,j של $(AB)\cdot C$ - זה שורה i של (AB) כפול ~~###~~ עמודה j של C.

נסמן: $AB \equiv D$.

$$d^i{}_k \cdot c^k{}_j = \left(a^i{}_l\, b^l{}_k\right) c^k{}_j$$

סכימה - k
חופשי - i,j.

$$= a^i{}_l \cdot b^l{}_k \cdot c^k{}_j =$$

סכימה: l,k.
חופשי: i,j.

$$\left[\sum_l \sum_k a^i{}_l\, b^l{}_k\, c^k{}_j.\right]$$

מצד שני: $BC \equiv F$. של האיבר ה- i,j.

של $A\cdot F$ הוא:

$$a^i{}_l \cdot F^l{}_j =$$

$$= a^i{}_l \cdot \left(b^l{}_k \cdot c^k{}_j\right) \underset{\text{מספרים ממשיים}}{\overset{\text{סקלרים}}{=}} a^i{}_l \cdot b^l{}_k \cdot c^k{}_j$$

מש"ל

(10) – סימטריזציה ואנטי-סימטריזציה:

פקטור מופיע:

$$a_{ij}+a_{ji} = 2a_{\{ij\}}$$

הגדרת סימטריזציה:

$$a_{\{ij\}} = \frac{1}{2}\cdot\left(a_{ij}+a_{ji}\right).$$

הגדרת אנטי סימטריזציה:

$$a_{[ij]} = \frac{1}{2}\cdot\left(a_{ij}-a_{ji}\right)$$

תר' תרגיל: לרשום מפורשת – את הביטוי:

$$a^{i}{}_{\{j}\cdot b^{j}{}_{k\}} = \frac{1}{2}\cdot\left(a^{i}{}_{j}\cdot b^{j}{}_{k} + a^{i}{}_{k}\cdot b^{j}{}_{j}\right).$$

רק [illegible]

תר' תרגיל: לרשום אחרת:

$$a^{i}{}_{j}\, g^{k[l}\, b^{i]} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(a^{i}{}_{j}\, g^{kl}\cdot b^{i}\right) - \left(a^{i}{}_{j}\, g^{ki}\, b^{l}\right)\right]$$

סכימה – $\emptyset$.

חופשיים – i,j,k,l.

מש

<u>תרגיל:</u> לפשט:

$$\delta^i_{[j}\,\delta^j_{i]} = \qquad 1 \le i,j \le 5 .$$

פתרון:

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\delta^i_{\cancel{j}}\cdot\delta^{\cancel{j}}_i + \delta^i_i\cdot\delta^j_j\right)$$

כסיאם - i, j

חופשיים - $\emptyset$.

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\underbrace{\delta^i_i}_{5} + \underbrace{\delta^i_i}_{5}\,\underbrace{\delta^j_j}_{5}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(5+25\right) = \underline{\underline{15}}.$$

<u>תרגיל:</u> ~~הוכח~~ תהי (L^i_j) מט׳ 2×2.

לרשום את בעזרת אנטיסימטריזציה את: $\det(L^i_j)$.

פתרון:

$$L^i_j = \begin{pmatrix} L^1_1 & L^1_2 \\ L^2_1 & L^2_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(L^i_j) = L^1_1\cdot L^2_2 - L^1_2\cdot L^2_1$$

$$= 2\cdot L^1_{[1}\,L^2_{2]}$$