

### תרגיל 13 מבוא לתורת החבורות

**שאלה 13.1** מצאו דוגמה של חבורה  $G$  הפועלת על קבוצה  $X$ , כך ש  $\gcd(|G|, |X|) = 1$  ולמרות זאת אין ל  $X$  נקודות שבת. (כזכור, הראנו בכיתה שאם בנוסף מניחים ש  $G$  חבורת  $p$  אז חייבות להיות נקודות שבת).

**שאלה 13.2** תהי  $G$  חבורה מסדר 77 הפועלת על קבוצה  $X$  בת 6 איברים. מצאו את הפעולה.

**שאלה 13.3** תהי  $X$  קבוצת כל הלוחות  $2 \times 2$  שכל ריבוע שלהם צבוע באחד משני הצבעים שחור/לבן. שימו לב שיש  $2^4 = 16$  לוחות כאלה. ניקח  $G = D_4$  ונגדיר פעולה טבעית שבה  $\sigma$  היא סיבוב (נניח לכיוון ימין) ו  $\tau$  היא שיקוף (נניח ביחס לאלכסון הראשי) מצאו את כל המסלולים ועבור כל איבר מצאו את המייצב שלו. מומלץ להעזר במשפט על גודל המייצב ומומלץ לוודא שמייצבים של איברים באותו מסלול הם צמודים.

**שאלה 13.4** תהי  $G$  חבורה סופית.

1. הוכיחו כי אם  $a \in G$  צמוד ל  $a^{-1}$  אז כל איבר  $x$  במחלקת הצמידות של  $a$  צמוד להופכי שלו  $x^{-1}$ .

2. הוכיחו כי אם  $G$  חבורה מסדר אי זוגי אז אין איבר  $a \in G$  שצמוד ל  $a^{-1}$ .

**שאלה 13.5** נגדיר

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\}$$

זאת חבורה ביחס לפעולה של כפל מטריצות שכבר נתקלנו בה בתרגיל בעבר. חשבו את המרכז של  $G$ . רמז: מה הסדר של  $G$ ?