22.11.17

תרגול

תזכורת BFS:

בונה עץ רוחב

* רוחב = כל קודקוד i ברמה S יתגלה לפני קודקוד ברמה S+1 - ממומשים בעזרת קיו.

פסאודו קוד:

color – מערך בגודל |V| המאחסן צבע של קודקוד

π - מערך שמאחסן את האבא של הקודקוד.

d - מערך של מרחקים מ-S (הקודקוד שהתחלנו ממנו).

Q - תור של קודקודים אפורים.

```
BFS(V,S):
    for each u∈V:
        color[u]=white
        d[u] = ∞
        π[u] = Null/None
    color[S]=grey
    d[S]=0
    π[S]= Null/None
    while Q.isEmpty ≠ false:
        for each v∈(שכנים של u):
            if color[v]==white:
                color[v]=grey
                d[v]=d[u]+1
                π[v]=u
                Q.Enqueue(v)
        Q.Dequeue
        color[u]=black
```

סיבוכיות זיכרון $O(|V|)$

זמן ריצה $O(|E|) + O(|V|)$

DFS:

color ...

π ...

d - זמן שבו הגענו לקודקוד

f - זמן נסיגה מקודקוד

<u>פסאודו קוד</u>:

```
for each u∈V:
    color[u]=white
    π[u]=Null\None
    time=0
    for each u∈V:
        if color[u]==white:
            DFS-visit(u)

DFS-visit(u):
    color[u]=grey
    time++
    d[u]=time
    for each v∈(u[edges]):
        if color[v]==white:
            π[v]=u
            DFS-visit(v)
    color[u]=black
    f[u]=time++
```

אשרי ≠ כום יש כמה רכיבי קשירות.

<u>זמן ריצה</u>: O(|E|)+O(|V|)

מיון טופולוגי:

סידור של קבוצת איברים שקיימת ביניהן תלות כך שאף איבר לא יופיע לפני האיבר בו תלוי.

DAG:

directed Acyclic Graph - גרף מכוון חסר מעגלים. (לא חייב להיות קשיר)

הגדרה פורמלית:

סידור של קודקודי DAG הינו מיון טופולוגי $\iff$ לכל $v,u\in V$, $(v,u)\in E$ מתקיים $f(u)<f(v)$.

(יש קשת בין שני קודקודים רק אם "השני תלוי בראשון").

פסאודו קוד:

1. הרץ DFS על G וחשב זמן נסיגה לכל $v\in V$
2. לכל צומת $v\in V$ בזמן נסיגה מ-V הכנס את V לתחילת רשימה מקושרת.
3. החזר רשימה מקושרת.

הוכחת נכונות:

יהיו $u,v\in V$ כך ש-$(u,v)\in E$. נחלק למקרים:

- אם הגענו קודם ל-u, הסריקה תגיע ל-v אחרון. זאת אומרת, נסוג ממנו בתור צאצא של u, ולכן $finish(v)<finish(u)$
- אם הגענו קודם ל-v, אז האלגוריתם לא יוכל להגיע מ-u ל-v (כי זה מעגל). לכן, $finish(v)<finish(u)$

∎

עצים פורשים:

הגדרה:

יהי גרף $G=(V,E)$, $W:E\to\mathbb{R}$. עץ פורש הוא עץ (תת גרף) $T=(V,E')$ כאשר $E'\subseteq E$.

משקל T הוא סכום משקלי קשתות העץ. נרצה למצוא T כך שהסכום מינימלי.

אלגוריתם קרוסקל:

1. התחל מיער ריק
2. מיין את קשתות הגרף בסדר לא יורד לפי משקלן.
3. לכל קשת $e\in E$ בסדר הזה: (א) אם הקשת לא סוגרת מעגל בגרף, הוסף את e לעץ.
(ב) אחרת אל תעשה דבר.

סיבוכיות: $O(E\log(V))$
מיון קשתות- $E\log(V)$ $(E\log E =)$
שלב 3 - $E\log(V)$ עם union find.

אלגוריתם Prim:

1. התחל מצומת r כלשהו ועץ $T\leftarrow\{r\}$
2. כל עוד $V\neq T$: (א) בחר את הקשת הקלה ביותר (u,v) כך ש- $u\in T$ ו- $v\notin T$.
(ב) בחר את הקשת לעץ. העבר את V ל- T.

סיבוכיות: $O(E+V\log V)$ עם מימוש המבוסס על ערימת פיבונאצ'י.
$O(E\log V)$ עם מימוש המבוסס על ערימה רגילה.

בעיית הסוכן הנוסע: (TSP)

הגדרה:
עבור גרף מלא (יש קשת בין כל זוג קודקודים) וממושקל. רוצים למצוא מסלול $v_1\to\dots\to v_1$ שעובר בכל צומת בדיוק פעם אחת ומשקלו המינימלי ביותר.
• הנחה - G מקיים את אי-שוויון המשולש.

תרגיל:
נתון G כנ"ל. יהי W_{opt} המשקל של המסלול הטוב ביותר ב-TSP (הגרף הנ"ל).
מצאו אלגוריתם פולינומיאלי שמוצא מסלול המבקר בכל צומת פעם אחת בדיוק עם משקל $W\le 2W_{opt}$

<u>פתרון:</u>

• OPT (מסלול אופטימלי) הוא עץ פורש (עובר בכל קודקוד בדיוק פעם אחת) + קשת אחת ← מקיים $W_{mst} < W_{opt}$

עץ פורש.

<u>הוכחה לטענה:</u>

ניקח OPT ונוריד ממנו קשת e (שסוגרת מעגל) $W_{mst} \le w(OPT-e) = w_{opt} - e$

$w(e)>0 \to W_{mst} < W_{opt}$ ∎

אלגוריתם:

1. נמצא עץ פורש מינימלי (באמצעות prim).
2. נעביר DFS על העץ <u>הפורש</u> הלוך ושוב. ← עוברים על כל קשת פעמיים. ← $2W_{mst} < 2W_{opt}$

כעת נשמיט קודקודים כפולים, ונדלג שמתקיים אי שוויון המשולש:

• כשמגיעים קודקוד שנלקחים במקום זה את הקשת בין קודקוד שלפני לזה שאחריו ← מובטח שלא נגדיל את משקל המסלול.

נסמן את משקל המסלול ב-W ← $W \le 2W_{mst} < 2W_{OPT}$ ← $\underline{W \le 2W_{opt}}$ ∎

<u>תרגיל:</u>

נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ופונקציית משקל $W:E\to\mathbb{R}$. מצאו עץ פורש מקסימלי של G.

<u>פתרון:</u>

נגדיר פונ' משקל חדשה $W':E\to\mathbb{R}$ כך ש $W'(e)=-W(e)$. יהי T עץ פורש מינימלי לפי W'.

נוכיח ש-T עץ פורש מקסימלי לפי W:

נניח בשלילה שקיים T' כך שמתקיים $\sum_{e\in T'} w(e) > \sum_{e\in T} w(e)$. מתקיים

$-\sum_{e\in T} w'(e) \Rightarrow \sum_{e\in T} w(e) < \sum_{e\in T'} w(e) = -\sum_{e\in T'} w'(e) \leftarrow \sum_{e\in T'} w'(e) < \sum_{e\in T} w'(e)$ סתירה. ∎

<u>תרגיל:</u>

נתון גרף $G=(V,E)$ לא מכוון וקשיר. כמו כן נתונות פונ' משקל על הקשתות $W:E\to\mathbb{R}$, $W':E\to\mathbb{R}$ המקיימות $W(e_1) \le W(e_2) \leftrightarrow W'(e_1) \le W'(e_2)$ לכל זוג קשתות e_1, e_2.

הוכח כי T עץ פורש מינימלי לפי $W' \leftrightarrow$ לפי W.

<u>פתרון:</u>

← יהי T עץ פורש מינימלי לפי W, לכן קיימת ריצה של קרוסקל המוצאת את T לפי W. כלומר קיים סידור מונוטוני לא יורד של הקשתות לפי W, שהרצת קרוסקל עליו מוציאה T.

מהנחת התרגיל סידור זה הוא מונוטוני לא יורד גם לפי W'. לכן מוצאת קרוסקל T הוא עץ פורש לפי W'.

→ זהה.

מסקנה:

עץ פורש מינימלי: מה שמשנה זה סדר המשקולות ולא המשקולות עצמן.