גאומטריה דיפרנציאלית 1 – תרגיל 1 (הסכם הסכימה של איינשטיין)

המלצה: ראשית רישמו מי הם אינדקסי הסכימה ומי הם האינדקסים החופשיים.

שאלה 1

פשטו ככל הניתן את הביטויים הבאים. הניחו כי כל הוקטורים הם ב- $\mathbb{R}^3$ וכי כל המטריצות הן ב- $M_{3x3}(\mathbb{R})$.

א) $\delta^a{}_b g_{ca} g^{bd} \delta^c{}_d$
ב) $\delta^i{}_j g_{ik} \delta^k{}_m$
ג) $\delta_{ij} u^i v^j$
ד) $a^i{}_j b^j{}_k c^k{}_m d^m{}_n$
ה) $u^k v^n \delta^i{}_{\underline{n}}$
ו) $\delta_{ij} a^{ij}$
ז) $g^{1a} g_{a1}$
ח) $\delta^i{}_j \delta^j{}_k \delta^k{}_i$
ט) $\delta^1{}_a \delta^a{}_b \delta^b{}_c \delta^c{}_d \delta^d{}_2$

שאלה 2

כיתבו את הביטויים הבאים ללא סימוני סימטריזציה ואנטיסימטריזציה, ועבור כל ביטוי ציינו מי הם האינדקסים החופשיים ומי הם אינדקסי הסכימה.

א) $a^i{}_j g^{k[m} b^{n]}$
ב) $L_{\{a\underline{c}\}} g^{ab} g_{b\underline{c}}$
ג) $\delta^i{}_{\{j} \delta^j{}_{k\}} \delta^k{}_m$ (ב- $\mathbb{R}^3$)

שאלה 3

יהיו $A=(a^i{}_j)$, $B=(b^i{}_j)$ מטריצות. נסמן $C=AB$.

א) הראו כי $2a^i{}_{[j} b^j_{k]} = c^i{}_k - a^i{}_k Tr(B)$ לכל $1 \le i,k \le n$.
ב) הראו כי $2a^{[i}{}_j b^{j]}_k = c^i{}_k - b^i{}_k Tr(A)$ לכל $1 \le i,k \le n$.
ג) נתון כי $Tr(A)=Tr(B) \neq 0$. הראו כי $A=B$ אמ"מ לכל $1 \le i,k \le n$ מתקיים $a^i{}_{[j} b^j_{k]} = a^{[i}{}_j b^{j]}_k$.

שאלה 4

א) נניח כי $(\delta^i{}_j)$ היא מטריצת היחידה מסדר $7x7$. פשטו ככל הניתן את $\delta^i{}_{\{j} \delta^j{}_{i\}}$.
ב) נתון כי $\delta^i{}_{\{j} \delta^j{}_{i\}} = 3$. כמה שורות יש למטריצה $(\delta^i{}_j)$?

שאלה 5

א) יהיו $A,B \in M_{nxn}(\mathbb{R})$. הראו כי $tr(AB)=tr(BA)$. (השתמשו בהסכם הסכימה של איינשטיין).
ב) יהיו $A,B,C \in M_{nxn}(\mathbb{R})$. הראו כי $A(B+C)=AB+AC$. (השתמשו בהסכם הסכימה של איינשטיין).
ג) הראו כי (a_{ij}) מטריצה סימטרית אמ"מ $a_{[ij]}=0$ לכל i,j , וכי היא אנטי-סימטרית אמ"מ $a_{\{ij\}}=0$ לכל i,j.