

תרגיל 12 - פתרון

19 בפברואר 2018

שאלה 1

חשבו את הגבולות הבאים העזרת ההגדרה:

$$a_n = n^6 - 3n^5 - 3n^4 - n^2 + 2n + 1 \quad (\text{א})$$

פתרון:

יהי H אינסופי היפר טבעי,

$$, a_H = H^6 - 3H^5 - 3H^4 - H^2 + 2H + 1 = H^6 \left(1 - \frac{3}{H} - \frac{1}{H^4} + \frac{2}{H^5} + \frac{1}{H^6} \right)$$

קיבלנו ש- a_H הוא מספר אינסופי חיובי ולכן:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

$$a_n = \sqrt{5n^4 + n^2} - \sqrt{5n^4 - n^2 + n + 1} \quad (\text{ב})$$

פתרון:

יהי H אינסופי היפר טבעי,

$$a_H = \sqrt{5H^4 + H^2} - \sqrt{5H^4 - H^2 + H + 1} = \frac{(\sqrt{5H^4 + H^2} - \sqrt{5H^4 - H^2 + H + 1})(\sqrt{5H^4 + H^2} + \sqrt{5H^4 - H^2 + H + 1})}{\sqrt{5H^4 + H^2} + \sqrt{5H^4 - H^2 + H + 1}} =$$

$$\frac{2H^2 - H - 1}{\sqrt{5H^4 + H^2} + \sqrt{5H^4 - H^2 + H + 1}} = \frac{2 - \frac{1}{H} - \frac{1}{H^2}}{\sqrt{5 + \frac{1}{H^2}} + \sqrt{5 - \frac{1}{H^2} + \frac{1}{H^3} + \frac{1}{H^4}}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = st(a_H) = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$a_n = \sqrt[3]{n^9 + n^6 - 3n + 3} - \sqrt[3]{n^9 - n^6 - 1} \quad (\text{ג})$$

פתרון:

יהי H אינסופי היפר טבעי,

$$a_H = \sqrt[3]{H^9 + H^6 - 3H + 3} - \sqrt[3]{H^9 - H^6 - 1} = \frac{(\sqrt[3]{H^9 + H^6 - 3H + 3} - \sqrt[3]{H^9 - H^6 - 1})((\sqrt[3]{H^9 + H^6 - 3H + 3})^2 + \sqrt[3]{H^9 + H^6 - 3H + 3}\sqrt[3]{H^9 - H^6 - 1} + (\sqrt[3]{H^9 - H^6 - 1})^2)}{((\sqrt[3]{H^9 + H^6 - 3H + 3})^2 + \sqrt[3]{H^9 + H^6 - 3H + 3}\sqrt[3]{H^9 - H^6 - 1} + (\sqrt[3]{H^9 - H^6 - 1})^2)} =$$

$$= \frac{H^9 + H^6 - 3H + 3 - (H^9 - H^6 - 1)}{((\sqrt[3]{H^9 + H^6 - 3H + 3})^2 + \sqrt[3]{H^9 + H^6 - 3H + 3}\sqrt[3]{H^9 - H^6 - 1} + (\sqrt[3]{H^9 - H^6 - 1})^2)} = \frac{2H^6 - 3H + 4}{(*)}$$

$$= \frac{2 - \frac{3}{H^5} + \frac{4}{H}}{\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{H^3} - \frac{3}{H^8} + \frac{3}{H^9}}\right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{H^6} - \frac{3}{H^8} + \frac{3}{H^9}}\sqrt[3]{1 - \frac{1}{H^3} - \frac{1}{H^9}} + \left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{H^3} - \frac{1}{H^9}}\right)^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = st(a_H) = \frac{2}{3}$$

שאלה 2

חשבו את הגבולות הבאים בעזרת המשפטים או בעזרת ההגדרה:

(א) $\left(\frac{2n^3-1}{2n^3+3}\right)^{3n^3+4}$

פתרון:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2n^3+3-4}{2n^3+3}\right)^{3n^3+4} &= \left(1 - \frac{4}{2n^3+3}\right)^{3n^3+4} = \left(1 - \frac{4}{2n^3+3}\right)^{\frac{3}{2} \cdot 2n^3 + \frac{9}{2} - \frac{9}{2} + 4} = \\ &= \left(1 - \frac{4}{2n^3+3}\right)^{\frac{3}{2}(2n^3+3)} \left(1 - \frac{4}{2n^3+3}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{4}{2n^3+3}\right)^{2n^3+3}\right)^{\frac{3}{2}} &= e^{\frac{3}{2}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{2n^3+3}\right)^{-\frac{1}{2}} &= 1 \end{aligned}$$

ולכן לפי אריתמטיקה של גבולות: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^3-1}{2n^3+3}\right)^{3n^3+4} = e^{\frac{3}{2}}$

(ב) $\frac{(\ln(n))^n}{(5n)^n}$

פתרון:

לפי חוקי חזקות נרשום:

$$\left(\frac{\ln(n)}{5n}\right)^n = e^{n \cdot \ln\left(\frac{\ln(n)}{5n}\right)}$$

קל לראות שהחזקה שואפת ל- $-\infty$ ולכן הגבול של הסדרה כולה שואף ל-0.

(ג) $\frac{(-1)^n}{n}$ (אפשר לפתור את התרגיל הזה בכמה שיטות, נסו כאן משפט הסנוויץ)

פתרון:

נשים לב ש- $\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n}$$

(ד) $\frac{5^n+7^n}{5^n-7^n}$

פתרון:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n+7^n}{5^n-7^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{5}{7}\right)^n + 1}{\left(\frac{5}{7}\right)^n - 1} = -1$$

הסבר:

נתבונן הפונקציה $f(x) = \left(\frac{5}{7}\right)^x$, זו פונקציה מעריכית עם בסיס בין אפס לאחד, ולכן

כאשר $x \rightarrow \infty$ הגבול שלה הוא אפס ולכן הגבול של $\left(\frac{5}{7}\right)^n$ הוא גם אפס.

(ה) $(8^n - n^2)$

פתרון:

$$8^n - n^2 = n^2 \left(\frac{8^n}{n^2} - 1\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8^n}{n^2} - 1\right) = \infty$$

לפי משפט סדרי גודל ולכן הגבול של הסדרה שלנו היא ∞ .

(ו) $\frac{n!+6}{(n+1)!+8}$

פתרון:

$$\frac{n!(1+\frac{6}{n!})}{n!(n+1+\frac{8}{n!})} = \frac{1+\frac{6}{n!}}{n+1+\frac{8}{n!}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n!} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!+6}{(n+1)!+8} = 0 \text{ ולכן}$$

$$\left(\frac{n}{n^2-2}\right)^{\frac{8n^4-3n^3-3n^2+2n}{7n^3+2n-2}} \quad (ז)$$

פתרון:

$$\left(\frac{n}{n^2-2}\right)^{\frac{8n^4-3n^3-3n^2-2n}{7n^3-2n-2}} = e^{\frac{8n^4-3n^3-3n^2-2n}{7n^3-2n-2} \cdot \ln\left(\frac{n}{n^2-2}\right)} \text{ נרשום}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^4-3n^2-3n^3-2n}{7n^3-2n-2} \cdot \ln\left(\frac{n}{n^2-2}\right) = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2-2}\right)^{\frac{8n^4-3n^3-3n^2-2n}{7n^3-2n-2}} = e^{-\infty} = 0 \text{ ולכן}$$

$$\frac{4^{n-5}}{2^n} \quad (ח)$$

פתרון:

$$\frac{4^{n-5}}{2^n} = (2)^n \cdot \frac{1}{4^5}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n-5}}{2^n} = \infty \text{ ולכן } \infty \text{-ל-} \infty \text{ שואפת}$$

שאלה 3

(א) הוכיחו ש- $\sqrt[n]{a} = 1$ כאשר $0 < a \in \mathbb{R}$

פתרון:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln(a)}{n}} = \text{נתבונן בפונקציה } f(x) = a^{\frac{1}{x}} \text{ כאשר } x \rightarrow \infty \text{ הגבול } e^0 = 1$$

ולכן הגבול של הסדרה שלנו הוא 1

(ב) תנו דוגמה לסדרות הבאות ונמקן את תשובתכם:

(1) חסומה שלא מתכנסת

פתרון:

$$a_n = (-1)^n \text{ זו סדרה חסומה בין } -1 \text{ ל } 1, \text{ וראינו בהרצאה שהיא לא מתכנסת}$$

(2) סדרה מונוטונית שלא חסומה

$a_n = n$, הסדרה הזו היא עולה כי $a_{n+1} - a_n = n + 1 - n = 1 > 0$ ולכן היא מונוטונית.

הסדרה לא חסומה, כי אחרת היא היתה מתכנסת לגבול סופי לפי משפט מההרצאה. נציב H אינסופי היפר טבעי ונקבל $a_H = H$ שהוא מספר אינסופי חיובי ולכן הסדרה מתבדרת ל- ∞ בסתירה.

ולכן הסדרה לא חסומה מלעיל אבל היא כן חסומה מלרע ע"י 1

(3) סדרה לא מונוטונית ולא חסומה

$$a_n = (-1)^n n$$

$$a_{n+1} - a_n = -(n+1) - n = -2n - 1 < 0 \text{ ולכן } n+1 \text{ הוא אי זוגי ולכן}$$

מצד שני אם n אי זוגי ואז $n+1$ זוגי אזי $a_{n+1} - a_n = n+1 - (-n) = 2n+1 > 0$
הסדרה לא חסומה כי עבור n -ים זוגיים נסמן $n = 2k$ ונקבל $a_{2k} = 2k$ ולכן הסדרה לא חסומה מלעיל
ועבור n -ים אי זוגיים נסמן $n = 2k+1$ ונקבל $a_{2k+1} = -(2k+1)$ ולכן הסדרה לא חסומה מלרע.

(4) סדרה יורדת וחסומה מלרע

פתרון:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0 \text{ כי } a_n = \frac{1}{n}$$

ברור שהסדרה חסומה מלרע ע"י 0 כי $\frac{1}{n} > 0$ לכל n טבעי.

(5) סדרה עולה וחסומה מלעיל

פתרון:

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} > 0 \text{ כי } a_n = -\frac{1}{n}$$

ברור שהסדרה חסומה מלעיל על ידי 0 כי $-\frac{1}{n} < 0$ לכל n טבעי.

ג) נתונות שתי סדרות a_n, b_n הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(1) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$ אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

פתרון:

הפרכה, נבחר

$$b_n = \begin{cases} 0 & n \text{ is even} \\ 1 & n \text{ is odd} \end{cases}, a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ is even} \\ 0 & n \text{ is odd} \end{cases}$$

כלומר $b_n = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$, $a_n = 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$
קל לראות ש- $a_n \cdot b_n = 0$ ולכן הגבול הוא אפס, מצד שני ברור ש- $a_n, b_n \neq 0$

(2) אם $a_n + b_n$ היא סדרה מתכנסת אזי a_n ו- b_n מתנסות.

פתרון:

הפרכה: נבחר $b_n = (-1)^{n+1}$, $a_n = (-1)^n$

כלומר $b_n = 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$, $a_n = -1, 1, -1, 1, -1, \dots$
ברור ש- $a_n + b_n = 0$ לכל n טבעי ולכן הגבול הוא אפס, מצד שני ראינו מהרצאה שהסדרות הללו הן סדרות מתבדרות

שאלה 4

תהי a_n סדרה ששואפת לאפס, b_n סדרה שאין לה גבול (לא סופי ולא אינסופי).

א) תנו דוגמה ל- a_n, b_n עבורן $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$

פתרון:

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ ולכן $b_n = (-1)^n, a_n = \frac{1}{n}$

ב) תנו דוגמה לסדרות a_n, b_n עבורן $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 1$

פתרון:

$b_n = (-1)^n, a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n (-1)^n n}{n} = 1$$

ג) תנו דוגמה לסדרות a_n, b_n עבורן $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n$ לא קיים

פתרון:

$$\text{ולכן } b_n = \frac{1}{n}, a_n = (-1)^n n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$$

ד) בתנאים של התרגיל, מה אפשר להגיד על הגבול של $a_n \cdot b_n$?

פתרון:

לא ניתן להגיד כלום

שאלה 5

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+5}{2n} = 2 \text{ ש-} \epsilon$$

פתרון:

יהי $\epsilon > 0$ נרצה למצוא $n_0 \in \mathbb{N}$ כל שלכל $n > n_0$ מתקיים

$$\left| \frac{4n+5}{2n} - 2 \right| < \epsilon$$

$$\left| \frac{4n+5}{2n} - 2 \right| = \left| \frac{4n+5-4n}{2n} \right| = \left| \frac{5}{2n} \right| < \epsilon$$

$$n_0 = \left\lfloor \frac{5}{2\epsilon} \right\rfloor + 1$$