

תרגיל 8 מבוא לתורת החבורות

שאלה 8.1 תהי G חבורה. תהי $H \leq G$ תת חבורה ו $N_1, N_2 \triangleleft G$ תתי חבורות נורמליות. בנוסף נניח כי

$$N_1 \cap H = N_2 \cap H$$

הוכיחו כי

$$HN_1/N_1 \simeq HN_2/N_2$$

שאלה 8.2 תהי G חבורה ו $H \triangleleft G$ תת חבורה נורמלית מאינדקס p ראשוני. כלומר $[G : H] = p$. יהי $K \leq G$ תת חבורה נוספת כך ש $K \not\subseteq H$. הוכיחו כי $KH = G$ ו $[K : K \cap H] = p$.

שאלה 8.3 תהי G חבורה ו $H, K \leq G$ שתי תתי חבורות. הוכיחו כי:

1. $HK = KH$ היא תת חבורה אם ורק אם $HK = KH$.
רמז: עבור אחד הכיוונים מומלץ להשתמש בעובדה הבאה. לכל תת קבוצה $A \subseteq G$ אפשר לסמן את קבוצת ההופכיים

$$A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}$$

אם H תת חבורה אז בפרט $H^{-1} = H$
[הערה: מהטענה הזאת אפשר להסיק בקלות מה שהוכחתם בהרצאה, שאם K נורמלית אז HK תת חבורה]

2. אם H ו K תתי חבורות נורמליות אז HK גם כן תת חבורה נורמלית.