תרגיל 5

1. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

   (א) הטופולוגיה טריויאלית.

   (ב) לכל סדרה x_n ו $x \in X$ מתקיים $x_n \to x$ (כל סדרה מתכנסת לכל מספר)

2. נגדיר על $\mathbb{Z}$ את הטופולוגיה

$$\tau = \{O_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{Z}\}$$

כאשר

$$O_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$$

בתרגיל הקודם הוכחתם שזאת אכן טופולוגיה.

   (א) מצאו סדרה שמתכנסת לכל איבר $n \in \mathbb{Z}$.

   (ב) האם קיימת סדרה שיש לה גבול יחיד? אם כן, תנו דוגמא. אם לא- הוכיחו.

3. תהי (X, τ_{cof}) קבוצה אינסופית עם הטופולוגיה הקו-סופית עליה.

   (א) תהי $\{x_n\} \subseteq X$ סדרה. הוכיחו שמתקיים אחד מהבאים:

      i. $\{x_n\}$ לא מתכנסת.

      ii. ל$\{x_n\}$ יש גבול יחיד.

      iii. $\{x_n\}$ מתכנסת לכל איבר בX.

   (ב) יהי Y מרחב טופולוגי מטריזבילי, ותהי $f : X \to Y$ פונקציה רציפה. הוכיחו שf קבועה.

   (ג) הוכיחו ש(X, τ_{cof}) אינו מטריזבילי. (הוכיחו שבעבור קבוצה סופית הטופולוגיה הקוסופית היא מטריזבילית)

4. הוכיחו שהרכבה של פונקציות רציפות היא רציפה.

5. יהי X מרחב טופולוגי ויהיו $A, B, C \subseteq X$ תתי קבוצות כך ש $C \subseteq A \cup B$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

(א) אם C פתוחה ב $A\cup B$ אז $A\cap C$ פתוחה ב A ו $B\cap C$ פתוחה ב B.

(ב) אם $A\cap C$ פתוחה ב A ו $B\cap C$ פתוחה ב B אז C פתוחה ב $A\cup B$.

6. (א) יהי X מרחב טופולוגי. ניקח תתי קבוצות $Z\subseteq Y\subseteq X$. הטופולוגיה של X משרה טופולוגיות תת מרחב על Y וזו משרה טופולוגית תת מרחב על Z. הראו שזו בדיוק טופולוגית תת המרחב ש X משרה על Z (אם הטענה הזאת הייתה לא נכונה היה מאוד קשה לדבר על תתי מרחבים).

   (ב) הוכיחו כי טופולוגית תת מרחב של טופולוגיה קו-סופית היא בעצמה טופולוגיה קו-סופית.

7. תהי $f:X\to Y$ פונקציה רציפה, ויהי $A\subseteq X$. הוכיחו ש $f|_A:A\to Y$ רציפה.

8. איזה תכונות הפרדה מקיים המרחב הבא?
$(\mathbb{N},\tau)$ כאשר $\tau=\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}\cup\{\mathbb{N},\emptyset\}$ ו $O_n=\{1,...,n\}$.

9. הוכיחו כי T_2 הוא תורשתי. כלומר, יהא (X,τ) מ״ט T_2 הוכיחו כי כל תת מרחב $Y\subseteq X$ הוא גם T_2.

10. יהא (X,τ) מ״ט בעל תכונה T_2. תהא $\tau\subseteq\tau'$ טופולוגיה נוספת על X. הוכיחו כי (X,τ') גם כן T_2.

11. בתרגיל זה נוכיח כי כל מ״מ (X,d) הוא T_4. יהא (X,d) מ״מ ויהיו S_1,S_2 קבוצות סגורות זרות.

   (א) לכל $x\in S_1$ הוכיחו כי $d(x,S_2)>0$

   (ב) לכל $x\in S_1$ נגדיר $r_x=\frac{d(x,S_2)}{2}$ ונגדיר $V_1=\cup_{x\in S_1}B(x,r_x)$. באופן דומה, לכל $y\in S_2$ נגדיר $r_y=\frac{d(y,S_1)}{2}$ ונגדיר $V_2=\cup_{y\in S_2}B(y,r_y)$. ברור כי V_1,V_2 פתוחות וזרות ו $S_i\subseteq V_i$. הוכיחו כי V_1,V_2 זרות וזה יסיים את ההוכחה כי (X,d) הוא T_4.

12. נראה מרחב שהוא T_2 שאינו T_3. נתבונן ב$\mathbb{R}$ ובתת קבוצה שלו $S=\{\frac{1}{n}\,:\,n\in\mathbb{N}\}$. נגדיר $\mathbb{CL}$ את קבוצת הקבוצות הסגורות ב $\mathbb{R}$ לפי המטריקה האוקלידית. ונגדיר $\{C=A\cup T|\,A\in\mathbb{CL},\,T\subseteq S\}$ להיות הקבוצות הסגורות בטופלוגיה τ (כלומר τ מוגדרת להיות כל קבוצת כל המשלימים של קבוצות אלו). תאמינו לנו, τ יוצאת טופולוגיה.

   (א) נאפיין את הקבוצות הפתוחות: הוכיחו כי $O\in\tau\iff O=B\cap R$ כאשר B פתוחה בטופולוגיה האוקלידית ו$S^c\subseteq R$.

(ב) הוכיחו שτ מכילה את הטופולוגיה האוקלידית, והסיקו ש $(\mathbb{R}, \tau)$ הוא האוסדורף.

(ג) הראו שאם $O \in \tau$ כך ש $S \subseteq O$, אז O פתוחה בטופולוגיה האוקלידית.

(ד) הוכיחו שלא קיימות U, V פתוחות בτ וזרות כך ש $S \subseteq V$ ו-$0 \in U$. הסיקו ש $(\mathbb{R}, \tau)$ אינו T_3.