משפט (חישוב אינטגרל מסילתי בעזרת פרמטריזציה – **"החלפת משתנה"**): אם γ מסילה בעלת פרמטריזציה גזירה ברציפות $Z(t):[a,b]\to\mathbb{C}$ אז לכל פונקציה רציפה $f:\gamma\to\mathbb{C}$ מתקיים

$$\int_{\gamma} f(z)dz=\int_{a}^{b} f\left(z(t)\right)z'(t)dt$$

הוכחה:

תהי $z_0,z_1,...,z_n$ חלוקה של γ, נסמנה ב S. קיימת חלוקה מתאימה של הקטע $[a,b]$, $a=t_0<...<t_n=b$, דנו בזאת בכיתה.

נסתכל על סכום רימן של האינטגרל $\int_{\gamma} f(z)dz$ המתאים לחלוקה S,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-1} f\left(w_k\right)\left(z_{k+1}-z_k\right)=\sum_{k=0}^{n-1} f\left(z\left(q_k\right)\right)\left(z\left(t_{k+1}\right)-z\left(t_k\right)\right)=\\&=...=\sum_{k=0}^{n-1} f\left(z\left(q_k\right)\right)\left(x\left(t_{k+1}\right)-x\left(t_k\right)\right)+i\sum_{k=0}^{n-1} f\left(z\left(q_k\right)\right)\left(y\left(t_{k+1}\right)-y\left(t_k\right)\right)\end{aligned} \tag{0}$$

כאשר w_k הוא איבר כלשהו בין z_k לבין z_{k+1} על γ, ו q_k הוא איבר בין t_k לבין t_{k+1} כך ש $z\left(q_k\right)=w_k$.

נסתכל על הסכום הראשון.

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-1} f\left(z\left(q_k\right)\right)\left(x\left(t_{k+1}\right)-x\left(t_k\right)\right)=\sum_{k=0}^{n-1} f\left(z\left(q_k\right)\right)\frac{\left(x\left(t_{k+1}\right)-x\left(t_k\right)\right)}{t_{k+1}-t_k}\left(t_{k+1}-t_k\right)=\\&=\sum_{k=0}^{n-1} f\left(z\left(q_k\right)\right)\frac{\left(x\left(t_{k+1}\right)-x\left(t_k\right)\right)}{t_{k+1}-t_k}\left(t_{k+1}-t_k\right)=\sum_{k=0}^{n-1} f\left(z\left(q_k\right)\right)x'\left(p_k\right)\left(t_{k+1}-t_k\right)\end{aligned} \tag{1}$$

כאשר המעבר האחרון נובע ממשפט לגרנז', ו p_k הוא איבר מסויים בקטע $[t_k,t_{k+1}]$.

עד כאן זה אותו הדבר כמו בכיתה, החל מהשורה הבאה ההוכחה משתנה.

נשים לב ש $f\circ z(t):[a,b]\to\mathbb{C}$ פונקציה גזירה ברציפות בקטע סגור ולכן היא רציפה במ"ש. כמו כן נשים לב ש $\left|q_k-p_k\right|\le t_{k+1}-t_k<\lambda(S)$ כאשר $\lambda(S)$ הוא פרמטר החלוקה. זאת מפני ש q_k,p_k שניהם באותו קטע של החלוקה. אי לכך, כאשר $\lambda(S)\to 0$ נקבל ש $\left|f\left(z\left(q_k\right)\right)-f\left(z\left(p_k\right)\right)\right|<\epsilon_\lambda\to 0$ וחשוב לשים לב ש ϵ_λ לא תלוי בk, בזכות הרציפות במ"ש.

כעת נמשיך את שרשרת השוויונים ב1 ונקבל

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(z\left(q_k\right)\right)x'\left(p_k\right)\left(t_{k+1}-t_k\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(z\left(p_k\right)\right)+f\left(z\left(q_k\right)\right)-f\left(z\left(p_k\right)\right)\right)x'\left(p_k\right)\left(t_{k+1}-t_k\right)=$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1} f\left(z\left(p_k\right)\right)x'\left(p_k\right)\left(t_{k+1}-t_k\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(z\left(q_k\right)\right)-f\left(z\left(p_k\right)\right)\right)x'\left(p_k\right)\left(t_{k+1}-t_k\right)$$

כאשר $\lambda \to 0$ הסכום הראשון, כסכום רימן של האינטגרל, מתכנס ל $\int_a^b f\left(z(t)\right)x'(t)dt$. כעת נראה שהסכום השני מתאפס.

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(z\left(q_k\right)\right)-f\left(z\left(p_k\right)\right)\right)x'\left(p_k\right)\left(t_{k+1}-t_k\right)\right|\le\sum_{k=0}^{n-1}\left|\left(f\left(z\left(q_k\right)\right)-f\left(z\left(p_k\right)\right)\right)x'\left(p_k\right)\left(t_{k+1}-t_k\right)\right|\le$$
$$\le\sum_{k=0}^{n-1}\epsilon_\lambda\left|x'\left(p_k\right)\right|\left|\left(t_{k+1}-t_k\right)\right|\overset{*}{\le}\epsilon_\lambda\max_{t\in[a,b]}\left|x'\left(t\right)\right|\sum_{k=0}^{n-1}\left(t_{k+1}-t_k\right)\overset{**}{=}\epsilon_\lambda\max_{t\in[a,b]}\left|x'\left(t\right)\right|(b-a)\to 0$$

כאשר את המעבר * יש לנמק בכך ש x' היא פונקציה רציפה בקטע חסום $[a,b]$ ועל כן חסומה בו, ומכאן החסם $\max_{t\in[a,b]}\left|x'\left(t\right)\right|$ אינו אינסופי. בנוסף, $\left(t_{k+1}>t_k\right)$ ולכן $\left|t_{k+1}-t_k\right|=\left(t_{k+1}-t_k\right)$. המעבר ** נובע מכך שזהו סכום טור טלסקופי שבו נשארים רק האיבר הראשון והאחרון, ולבסוף הגבול הוא של ϵ_λ כפול שני קבועים, ולפי הנ"ל $\epsilon_\lambda \to 0$.

לסיכום, קיבלנו

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(z\left(q_k\right)\right)\left(x\left(t_{k+1}\right)-x\left(t_k\right)\right)\to\int_a^b f\left(z(t)\right)x'(t)dt$$

ובאופן זהה מקבלים

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(z\left(q_k\right)\right)\left(y\left(t_{k+1}\right)-y\left(t_k\right)\right)\to\int_a^b f\left(z(t)\right)y'(t)dt$$

ומכאן. בעזרת (0), מגיעים למסקנה הנדרשת,

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(w_k\right)\left(z_{k+1}-z_k\right)\to\int_a^b f\left(z(t)\right)x'(t)dt+i\int_a^b f\left(z(t)\right)y'(t)dt=\int_a^b f\left(z(t)\right)z'(t)dt$$

מ.ש.ל