תרגיל 7

<u>הגדרות וסימונים</u>
ניישר קו בין קבוצות ההרצאה והתרגול לצורך התרגיל:

1. מרחב (X,τ) הוא B_2 אם קיים לו בסיס בן מניה.
2. הטופולוגיה הקו־מנייתית (לפעמים נקראת גם קו־בת־מניה) על קבוצה X מוגדרת ע"י

$$\tau_{cof}:=\{\emptyset\}\cup\{O\subseteq X\mid |O^c|<\infty\}$$

3. פרה־בסיס (נקרא גם תת בסיס) על מרחב טופולוגי (X,τ) הוא קבוצה של קבוצות פתוחות $\alpha\subseteq\tau$ כך ש־$\alpha^{\cap_F}$ (כלומר אוסף החיתוכים הסופיים של קבוצות מ־α) הוא בסיס.
ישנו משפט שאומר שכל כיסוי α פתוח של X (כלומר אוסף של קבוצות פתוחות כך ש־$\bigcup\alpha=X$) הוא פרה־בסיס של $\left(\alpha^{\cap_F}\right)^{\cup}$.

<u>תרגילים</u>

1. הוכיחו שאם (X,τ) הוא מרחב B_2 אז $|\tau|\le\aleph=2^{\aleph_0}$.
<u>פתרון</u>
יהיה γ בסיס בן מניה ל־X. ראינו שלכל קבוצה פתוחה $O\in\tau$ קיימת תת קבוצה $\gamma_O\subseteq\gamma$ כך ש־

$$O=\bigcup\gamma_O$$

כלומר, ישנה התאמה חח"ע מ־τ לקבוצת החזקה של γ. מכיוון ש־γ בת מניה מתקיים ש־$|\mathcal{P}(\gamma)|\le 2^{\aleph_0}$ ולכן גם $|\tau|\le 2^{\aleph_0}$.

2. מצאו מתי הטופולוגיה הקו־בת־מניה (X,τ_{coc}) היא B_2.
<u>פתרון</u>
רק כאשר X בת מניה. ראשית, ברור שאם X בת מניה אז (X,τ_{coc}) דיסקרטית (בת מניה) ולכן B_2. מנגד, נניח ש־(X,τ_{coc}) היא B_2. למעשה, מספיק לנו להניח ש־X היא B_1. יהי $\beta\subseteq\tau_{coc}$ בסיס מקומי בן מניה ב־$x_0\in X$. לפי הגדרה, לכל $U\in\tau_{coc}$ מתקיים ש־U^c בת מניה. נסמן

$$U^c=\left\{x_1^{(U)},x_2^{(U)},\dots\right\}$$

נגדיר פונקציה $\varphi : \beta \times \mathbb{N}^{>0} \to X \setminus \{x_0\}$

$$\varphi(U,n) := x_n^{(U)}$$

אנחנו טוענים שהפונקציה הזו היא על. יהי $x_0 \neq x \in X$. נשים לב ש־$x_0 \in X \backslash \{x\} \in \tau_{coc}$ היא סביבה ולפי הגדרת בסיס קיימת $U \in \beta$ כך ש־$U \subseteq X \setminus \{x\}$. בפרט, $x = x_n^{(U)}$ עבור $n \in \mathbb{N}^{>0}$ ולכן $x = \varphi(U,n)$. לפי משפט המכפלה של עוצמות אנחנו מסיקים ש־

$$|X| \leq |\beta \times \mathbb{N}| \leq \max\{|\beta|, \aleph_0\}$$

ולכן אם β בת מניה גם X.

3. הראו שבמרחב טופולוגי (X,τ) שהוא B_2 לכל כיסוי פתוח יש תת כיסוי בן מניה. כיסוי פתוח הוא אוסף $\{O_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$ של תתי קבוצות פתוחות כך ש־$X = \bigcup_{i\in I} O_i$. תת כיסוי הוא תת קבוצה $J \subseteq I$ כך ש־$\{O_j\}_{j\in J}$ כיסוי.

פתרון

יהי $\{O_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$ כיסוי פתוח של X ויהי γ בסיס בן מניה של X. מכיוון ש־$\{O_i\}_{i\in I}$ כיסוי של X, לכל $x \in X$ קיים $i_x \in I$ כך ש־$x \in O_{i_x}$. לפי הגדרת בסיס, קיימים $U_x \in \gamma$ כך ש־$x \in U_x \subseteq O_{i_x}$. מכיוון ש־γ בן מניה אנחנו יכולים ליצור מספור

$$\{U^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{U_x\}_{x\in X}$$

(שימו לב שכאן $U^{(n)}$ הוא סתם מספור ולא הנגזרת ה־n־ית). לכל $n \in \mathbb{N}$ נבחר $x(n) \in X$ כך ש־$U^{(n)} = U_{x(n)}$. לבסוף, נסתכל על

$$J := \{i_{x(n)} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq I$$

אנחנו טוענים ש־$\{O_j\}_{j\in J}$ תת כיסוי בן מניה. נראה שזה באמת המצב, כלומר ש־$\bigcup_{j\in J} O_j = X$. לכל $x \in X$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$U^{(n)} = U_x$ ולכן

$$x \in U_x = U^{(n)} = U_{x(n)} \subseteq O_{i_{x(n)}} \subseteq \bigcup_{j\in J} O_j$$

כרצוי.

4. הראו שאם (X,τ) הוא B_2 אז לכל בסיס γ יש תת קבוצה בת מניה $\gamma' \subseteq \gamma$ שמהווה בסיס לטופולוגיה גם היא.

פתרון

יהי $\delta \subseteq \tau$ בסיס בן מניה (אחד כזה קיים כי X הוא B_2). אנחנו טוענים שלכל $O \in \delta$ קיימת תת קבוצה $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \gamma$ כך ש־$O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. אכן, לפי הגדרת הבסיס, לכל $x \in O$ קיימות $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \gamma$ כך ש־

$$O = \bigcup_{i\in I} U_i$$

כלומר, לכל $x \in O$ קיימת $i_x \in I$ כך ש־$x \in U_{i_x}$. מכיוון ש־δ בסיס, קיים $V_x \in \delta$ כך ש־$x \in V_x \subseteq U_{i_x}$. נמספר $\{V_x\}_{x\in O} = \{V^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$. לכל $n \in \mathbb{N}$ נבחר $x^{(n)} \in O$ כך ש־$V_{x^{(n)}} = V^{(n)}$. קל לראות ש־

$$O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_{i_{x^{(n)}}}$$

הצלחנו להראות שכל $O \in \delta$ ניתן להצגה כ־

$$O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n^{(O)}$$

עבור $U_n^{(O)} \in \gamma$ לכל $n \in \mathbb{N}$. נבחר

$$\gamma' := \left\{U_n^{(O)}\right\}_{O\in\delta, n\in\mathbb{N}}$$

ישנה פונקציה על $\varphi : \delta\times\mathbb{N} \to \gamma'$ שמוגדרת ע"י $\varphi(O,n) := U_n^{(O)}$ ולכן $|\gamma'| \leq |\delta\times\mathbb{N}|$.
מכיוון ש־δ בת מניה גם γ' בת מניה. לבסוף, γ' גם בסיס כי

$$\tau \supseteq (\gamma')^{\cup} \supseteq \delta^{\cup} = \tau$$

5. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי ותהי $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(X)$ משפחה של תתי קבוצות. לכל $A \in \mathcal{J}$ ו־$\varepsilon > 0$ נגדיר

$$W_A(\varepsilon) := \left\{f : X \to \mathbb{R} \mid \sup_{x\in A} : |f(x)| < \varepsilon\right\} \subseteq \mathbb{R}^X$$

נגדיר גם

$$\alpha_{\mathcal{J}} := \left\{f + W_A(\varepsilon) \mid f \in \mathbb{R}^X, A \in \mathcal{J}, \varepsilon > 0\right\}$$

שימו לב שחיבור של פונקציה עם קבוצה מוגדר לפי

$$\forall f \in \mathbb{R}^X, \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^X : f + \mathcal{A} := \{f + g \mid g \in \mathcal{A}\}.$$

הראו ש־$\alpha_{\mathcal{J}}$ הוא תמיד פרה־בסיס ל־$\mathbb{R}^X$. בנוסף, עבור כל אחת מהאפשרויות הבאות ל־$\mathcal{J}$ קבעו אם $\alpha_{\mathcal{J}}$ הוא בסיס. הוכיחו את טענותיכם.

(א) $\mathcal{J}_1 := \{\{x\} \mid x \in X\}$ – כלומר קבוצת כל הנקודונים

(ב) $\mathcal{J}_2 := \{F \subseteq X \mid |F| < \infty\}$ – כלומר קבוצת הקבוצות הסופיות.

(ג) $\mathcal{J}_3 := \{B \subseteq X \mid B \text{ is bounded}\}$ – כלומר כל הקבוצות החסומות (כאן צריך להניח ש־X הוא מטרי)

(ד) $\mathcal{J}_4 := \{B \subseteq X \mid B \text{ is connected}\}$ – כלומר כל הקבוצות הקשירות

(ה) $\mathcal{J}_5 := \{X\}$

<u>פתרון</u>

ראינו שכדי שתת קבוצה של τ תהיה פרה־בסיס מספיק לוודא שהיא כיסוי. ואכן, קל לוודא שלכל A ולכל $\varepsilon > 0$ מתקיים ש־$0 \in W_A(\varepsilon)$ ולכן $f \in f + W_A(\varepsilon)$.
במילים אחרות, α_J אכן מכסה כל $f \in \mathbb{R}^X$. נבצע עוד הבחנה חשובה: $\alpha_{\mathcal{J}}$ בסיס אם ורק אם

$$\beta_J := \{W_A(\varepsilon) \mid A \in \mathcal{J}, \varepsilon > 0\}$$

בסיס מקומי ב־0. נניח ש־$\alpha_{\mathcal{J}}$ בסיס ונראה ש־$\beta_{\mathcal{J}}$ בסיס ב־0. נניח ש־$0 \in O \in \alpha_{\mathcal{J}}$ סביבה של 0. לפי הגדרה, קיימים $f \in \mathbb{R}^X, \varepsilon > 0$ ו־$A \in \mathcal{J}$ כך ש־$O = f + W_A(\varepsilon)$. לפי הגדרה מתקיים ש־

$$\sup_{x \in A} |f(x)| < \varepsilon$$

ולכן אפשר להגדיר

$$\delta := \varepsilon - \sup_{x \in A} |f(x)| > 0$$

אנחנו טוענים ש־$W_A(\delta) \subseteq O = f + W_A(\varepsilon)$. אכן, לכל $g \in W_A(\delta)$ מתקיים:

$$\sup_{x \in A} |g(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in A} |g(x)| + \sup_{x \in A} |f(x)| <$$

$$\delta + \sup_{x \in A} |f(x)| = \varepsilon - \sup_{x \in A} |f(x)| + \sup_{x \in A} |f(x)| = \varepsilon$$

כרצוי. מנגד, נניח ש־$\beta_{\mathcal{J}}$ בסיס מקומי ב־0. צריך להוכיח שאם $U, V \in \alpha_{\mathcal{J}}$ ו־$f \in U \cap V$ אז קיימת $O \in \alpha_{\mathcal{J}}$ כך ש־$f \in O \subseteq U \cap V$. לפי הגדרה, קיימות $A_U, A_V \in \mathcal{J}$, $f_U, f_V \in F = \mathbb{R}^X$ ו־$\varepsilon_U, \varepsilon_V > 0$ כך ש־$U = f_U + W_{A_U}(\varepsilon_U)$ ו־$V = f_V + W_{A_V}(\varepsilon_V)$. נסמן

$$\delta_V := \varepsilon_V - \sup_{x \in A_V} |f(x) - f_V(x)|, \ \delta_U := \varepsilon_U - \sup_{x \in A_U} |f(x) - f_U(x)| > 0$$

מכיוון ש־$\beta_{\mathcal{J}}$ בסיס מקומי ב־0, קיימת $B \in \mathcal{J}$ ו־$\delta > 0$ כך ש־

$$W_B(\delta) \subseteq W_{A_V}\left(\delta_V\right) \cap W_{A_U}\left(\delta_U\right)$$

אנחנו טוענים ש־$f + W_B(\delta) \subseteq U \cap V$. נראה רק ש־$f + W_B(\delta) \subseteq U$ וההוכחה ש־$f + W_B(\delta) \subseteq V$ דומה. יהי $g \in W_B(\delta)$ נראה ש־$f + g \in V$. לפי הבניה של $W_B(\delta)$ מתקיים ש־$W_B(\delta) \subseteq W_{A_U}\left(\delta_U\right)$. לכן,

$$\sup_{x \in A_U} |g(x)| < \delta_U$$

לכן

$$\sup_{x \in A_U} |f(x) + g(x) - f_U(x)| \leq \sup_{x \in A_U} |f(x) - f_U(x)| + |g(x)| \leq$$

$$\sup_{x \in A_U} |f(x) - f_U(x)| + \sup_{x \in A_U} |g(x)| \leq$$

$$\sup_{x \in A_U} |f(x) - f_U(x)| + \delta_U =$$

$$\sup_{x \in A_U} |f(x) - f_U(x)| + \varepsilon_U - \sup_{x \in A_U} |f(x) - f_U(x)| = \varepsilon_U$$

הראנו ש־$f + g \in U$ כרצוי.

i. זה אינו בסיס אם X מכיל יותר מנקודה אחת. נראה שזה לא בסיס מקומי ב־0 ואז לפי הטענה שלנו הוא גם לא יהיה בסיס. אכן, אם $x \neq y \in X$ אז אין אף נקודון $z \in X$ ו־$f \in \mathbb{R}^X$ כך ש־$f+W_{\{z\}}(\varepsilon) \subseteq \Big(W_{\{x\}}(1)\Big) \cap \Big(W_{\{y\}}(1)\Big)$.

ii. זה אכן בסיס. קל לראות ש־$W_{A\cup B} = \Big(W_A(\varepsilon)\Big) \cap \Big(W_B(\varepsilon)\Big)$. מכיוון שאיחוד של קבוצות סופיות הוא סופי, α_{J_2} סגור לחיתוכים סופיים.

iii. טיעון דומה לסעיף הקודם אבל משתמשים בעובדה שאיחוד סופי של קבוצות חסומות הוא חסום.

iv. זה לאו דווקא בסיס. גם כאן נעזר בטענה שלנו על בסיס מקומי. אם נסתכל על $X = [0,1] \cup [2,3]$ אז אין אף קבוצה קשירה $A \subseteq \mathbb{R}$ כך ש־

$$W_A(\varepsilon) \subseteq \Big(W_{[0,1]}(1)\Big) \cap \Big(W_{[2,3]}(1)\Big)$$

v. כן. α_{J_5} היא קבוצה מונוטונית של קבוצות ולכן חיתוך סופי שלהן שקול לפעולת המינימום. מכאן ש־α_{J_5} הוא בסיס ולא סתם פרה־בסיס. (למעשה, זה בעצם הבסיס של הטופולוגיה של התכנסות אחידה).

6. בסימונים של התרגיל הקודם, מצאו את היחסים בין הטופולוגיות שמושרות ע"י $\alpha_{\mathcal{J}_1}, \alpha_{\mathcal{J}_2}, \alpha_{\mathcal{J}_3}, \alpha_{\mathcal{J}_4}, \alpha_{\mathcal{J}_5}$ במקרים הבאים:

(א) $X = \mathbb{R}$

(ב) $X = \mathbb{Q}$

(ג) $X = [0,1]$

(ד) $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[2n, 2n+1]$

<u>פתרון</u>

קל לראות שאם $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ אז הטופולוגיה שמושרית מ־$\alpha_{\mathcal{I}}$ חלשה מהטופולוגיה שמושרית מ־$\alpha_{\mathcal{J}}$. לכן, מיון של $\{\mathcal{J}_i\}_{i=1}^5$ בכל אחד מהמקרים יתן לנו להסיק על היחסים בין הטופולוגיות. נשים לב שהטופולוגיה שמושרית מ־$\alpha_{\mathcal{J}_1}$ כפרה־בסיס שקולה לטופולוגיה שמושרית מ־$\alpha_{\mathcal{J}_2}$ כבסיס ללא תלות ב־X. בנוסף, כל קבוצה סופית היא חסומה ולכן אפשר לרשום

$$\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}_3$$

נסמן ב־τ_i את הטופולוגיה שמושרית מ־$\alpha_{\mathcal{J}_i}$. בגלל ש־$\mathcal{J}_5$ מכילה את X, קל לראות ש־$\alpha_{\mathcal{J}_5} \supseteq \alpha_{\mathcal{J}}$ לכל $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ולכן

$$\alpha_{\mathcal{J}_1} = \alpha_{\mathcal{J}_2} \subseteq \alpha_{\mathcal{J}_3} \subseteq \alpha_{\mathcal{J}_5}$$

i. במקרה ש־$X = \mathbb{R}$ מתקיים ש־X קשיר ולכן לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים ש־$W_{\mathbb{R}}(\varepsilon) \in \alpha_{J_4}$ וגם לכל A קשירה מתקיים ש־$W_{\mathbb{R}}(\varepsilon) \subseteq W_A(\varepsilon)$. אפשר להסיק מכאן ש־$\tau_4 = \tau_5$. אז

$$\tau_1 = \tau_2 \subsetneq \tau_3 \subsetneq \tau_4 = \tau_5$$

ii. במקרה ש־$X = \mathbb{Q}$ אז הקבוצות הקשירות היחידות הם הנקודונים (כי X בלתי קשיר לחלוטין). לכן

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_4 \subsetneq \tau_3 = \tau_5$$

iii. אם $X = [0,1]$ אז הוא חסום וגם קשיר. מכאן ש־

$$\tau_1 = \tau_2 \subsetneq \tau_3 = \tau_4 = \tau_5$$

iv. אם $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[2n, 2n+1]$ אז כל קבוצה קשירה היא חסומה (אבל ההפך אינו נכון). לכן

$$\tau_1 = \tau_2 \subsetneq \tau_4 \subsetneq \tau_3 \subsetneq \tau_5$$