פתרון מועד ב' גיאומטריה תשע"ו

1 בספטמבר 2016

1. נתונה תבנית ריבועית $Q\left(x,y\right)=3x^{2}+4xy-6y^{2}$.

א. עקומה מישורית מוגדרת על ידי המשוואה $Q\left(x,y\right)=-1$. אפיינו את העקומה.

<u>פתרון:</u>

אפשר לכתוב:

$$Q\left(x,y\right)=\left(\begin{array}{cc}x & y\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}3 & 2\\2 & -6\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}x\\y\end{array}\right)$$

הערכים העצמיים של המטריצה $\left(\begin{array}{cc}3 & 2\\2 & -6\end{array}\right)$ הם שורשי הפולינום האופייני:

$$\left(\lambda-3\right)\left(\lambda+6\right)-4=\lambda^{2}+3\lambda-22$$

כלומר $\lambda=\frac{-3\pm\sqrt{97}}{2}$.

אחד חיובי ואחד שלילי ולכן זו היפרבולה.

ב. אפיינו את המשטח המתקבל כגרף של התבנית הריבועית $z=Q\left(x,y\right)$.

<u>פתרון:</u>

כפי שראינו בסעיף הקודם, Q מתארת היפרבולה, ולכן המשטח $z=Q\left(x,y\right)$ הוא פרבולואיד (כי z מופיע במעלה ראשונה בעוד ש-x,y הם בריבוע) היפרבולי.

ג. חשבו את עקמומיות גאוס של הגרף בנקודה $(0,0,0)$.

<u>פתרון:</u>

באופן דומה למועד א', אפשר להסתכל על הפרמטריזציה הבאה של המשטח:

$$r\left(x,y\right)=\left(x,y,f\left(x,y\right)\right)$$

נקבל שהתבניות היסודיות הן:

$$\left(\begin{array}{cc}1+f_{x}^{2} & f_{x}f_{y}\\f_{x}f_{y} & 1+f_{y}^{2}\end{array}\right),\frac{1}{\sqrt{1+f_{x}^{2}+f_{y}^{2}}}\left(\begin{array}{cc}f_{xx} & f_{xy}\\f_{xy} & f_{yy}\end{array}\right)$$

אצלנו $f(x,y) = 3x^2 + 4xy - 6y^2$. לכן:

$$f_{xx} = 6, f_{yy} = -12, f_{xy} = 4$$

בכל נקודה, בפרט בראשית $(0,0,0)$. הנגזרות הראשונות הן:

$$f_x = 6x + 4y, f_y = 4x - 12y$$

ובראשית הן מתאפסות. לכן בנקודה $(0,0,0)$ התבניות הן:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$W = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$K = \det W = -88$$

2. יהי $M \subseteq \mathbb{R}^3$ משטח עם פרמטריזציה $x\left(u^1, u^2\right)$.

א. פרטו ארבע דרכים לחישוב עקמומיות גאוס של המשטח.

<u>פתרון:</u>

כמו שאנו יודעים, ארבע השיטות הן:

1. $K = \det\left(L_j^i\right) = \det W$.
2. $K = \frac{\det(L_{ij})}{\det(g_{ij})} = \det W$.
3. המשפט המפתיע של גאוס.
4. אופרטור לפלס־בלטרמי. בשיטה זו אפשר להשתמש רק אם הקואורדינטות איזותרמיות.

ב. נניח שהמטריקה היא $\frac{c^2}{y^2}\left(dx^2 + dy^2\right)$. חשבו את עקמומיות גאוס.

<u>פתרון:</u>

הקואורדינטות איזותרמיות ולכן אפשר להשתמש באופרטור לפלס־בלטרמי. כלומר:

$$K = -\frac{1}{2}\Delta_{LB}\left(\ln\frac{c^2}{y^2}\right) = \Delta_{LB}\left(\ln\frac{y}{c}\right) = \frac{y^2}{c^2}\Delta\left(\ln y - \ln c\right) =$$

$$= \frac{y^2}{c^2} \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{1}{c^2}$$

ג. נניח שהמטריקה היא $\left(\sin^2\varphi\right) d\theta^2 + d\varphi^2$.

<u>פתרון:</u>

הקואורדינטות לא איזותרמיות ואין לנו פרמטריזציה, ולכן נשתמש במשפט המפתיע.

אנו צריכים את סמלי כריסטופל. נשים לב שזו מטריקה של משטח סיבוב של עקומה במהירות יחידה, כאשר:

$$f(\varphi) = \sin\varphi$$

כבר חישבנו את סמלי כריסטופל של משטח סיבוב:

$$\Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{22} = 0$$

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{f'}{f} = \cot\varphi$$

$$\Gamma^2_{11} = f'f = \sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi$$

לפי המשפט המפתיע:

$$K = \frac{1}{g_{11}}\left(\Gamma^2_{11,2} - \Gamma^2_{12,1} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} - \left(\Gamma^2_{12}\right)^2\right)$$

אצלנו, $\Gamma^2_{11,2} = \cos 2\varphi$, $\Gamma^2_{12,1} = 0$. לכן:

$$K = \frac{1}{\sin^2\varphi}\left(\cos 2\varphi - 0 + 0 + 0 - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\cot\varphi - 0\right) =$$

$$= \frac{1}{\sin^2\varphi}\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi - \cos^2\varphi\right) = -1$$

וזו העקמומיות.

3. יהי M משטח.

א. עבור מקדמי מטריקה (g_{ij}) עם קואורדינטות $\left(u^i\right)$ הגדירו את אלמנט השטח dA.

<u>פתרון:</u>

כמו שאנו יודעים,

$$dA=\sqrt{\det\left(g_{ij}\right)}du^{1}du^{2}$$

ב. בטאו את משטח גאוס־בונה עבור משטח סגור קמור M.

<u>פתרון:</u>

עבור משטח סגור קמור, משטח גאוס־בונה אומר:

$$\iint\limits_{M}KdA=4\pi=2\chi\left(S^{2}\right)$$

ג. עבור משטח $M_{1}\subseteq\mathbb{R}^{3}$ המוגדר על ידי המשוואה $x^{2}+3y^{2}+2z^{2}=1$ מצאו את $\iint_{M_{1}}KdA$.

<u>פתרון:</u>

זהו אליפסואיד, הג'ינוס שלו הוא 0 (וזהו משטח סגור קמור, אם רוצים לצטט את הסעיף הקודם) ולכן:

$$\iint\limits_{M_{1}}KdA=4\pi$$

ד. יהי $n>0$ טבעי. עבור משטח $M_{2}\subseteq\mathbb{R}^{3}$ המוגדר על ידי:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\left(x-9k\right)^{2}+y^{2}+z^{2}-1\right)=0$$

מצאו את $\iint_{M_{2}}KdA$.

<u>פתרון:</u>

המשטח הוא אוסף ספירות זרות (כל אחת עם רדיוס 1ומרכז $(9k,0,0)$ כאשר $1\leq k\leq n$).

האינטגרל על כל אחת מהן הוא 4π (כמו בסעיף הקודם), ולכן בסה"כ:

$$\iint\limits_{M_{2}}KdA=4\pi n$$

4. כתבו את הביטויים הבאים באמצעות $L_{ij},L_{l}^{k},\Gamma_{ij}^{k},g_{ij}$. פשטו כמה שאפשר.

א. $\left\langle x_{ij},x_{k}\right\rangle \delta_{m}^{k}g^{ml}$.

<u>פתרון:</u>

בסכום יש ארבעה איברים:

$$\left\langle x_{ij},x_{1}\right\rangle \delta_{1}^{1}g^{1l}+\left\langle x_{ij},x_{1}\right\rangle \delta_{2}^{1}g^{2l}+\left\langle x_{ij},x_{2}\right\rangle \delta_{2}^{2}g^{2l}+\left\langle x_{ij},x_{2}\right\rangle \delta_{1}^{2}g^{1l}$$

מהגדרת הדלתא של קרונקר, נישאר עם:

$$\langle x_{ij}, x_2 \rangle g^{2l} + \langle x_{ij}, x_1 \rangle g^{1l} = \langle x_{ij}, x_m \rangle g^{ml}$$

כעת, נכתוב:

$$x_{ij} = \Gamma^k_{ij} x_k + L_{ij} \vec{n}$$

ונקבל:

$$\langle x_{ij}, x_m \rangle g^{ml} = \left\langle \Gamma^k_{ij} x_k + L_{ij} \vec{n}, x_m \right\rangle g^{ml} =$$

נזכור שהנורמל מאונך ולקטורי הנגזרות ושמתקיים: $\langle x_i, x_j \rangle = g_{ij}$ ונקבל:

$$= \Gamma^k_{ij} g_{km} g^{ml} = \Gamma^k_{ij} \delta^l_k = \Gamma^l_{ij}$$

מכיוון שהמטריצות $(g)^{ij}, (g)_{ij}$ הפיכות.

ב. $\delta^k_m \langle x_{ab}, \vec{n}_k \rangle$.

<u>פתרון:</u>

זה היה גם במועד א'. ראינו שמתקיים:

$$\langle x_{ab}, \vec{n}_k \rangle = -\Gamma^j_{ab} L_{kj}$$

לפיכך:

$$\delta^k_m \langle x_{ab}, \vec{n}_k \rangle = -\delta^k_m \Gamma^j_{ab} L_{kj} = -\Gamma^j_{ab} L_{mj}$$

ג. $\langle x_{pqr}, \vec{n} \rangle$.

<u>פתרון:</u>

גם זה היה במועד א'. x_{pqr} הוא הנגזרת השלישית (לפי המשתנים u_p, u_q, u_r). לפי כלל לייבניץ:

$$\frac{\partial}{\partial u_r} \langle x_{pq}, \vec{n} \rangle = \langle x_{pqr}, \vec{n} \rangle + \langle x_{pq}, \vec{n}_r \rangle$$

כעת: $x_{pq}=\Gamma_{pq}^{k}x_k+L_{pq}\vec{n}$, ושוב מכיוון שהוקטורים $x_j,\vec{n}$ הם אורתוגונאליים נקבל:

$$\langle x_{pq},\vec{n}\rangle=\left\langle \Gamma_{pq}^{k}x_k+L_{pq}\vec{n},\vec{n}\right\rangle=L_{pq}\left\langle \vec{n},\vec{n}\right\rangle=L_{pq}$$

כמו כן, אנו יודעים שמתקיים:

$$\vec{n}_r=L_r^j x_j$$

ולכן:

$$\langle x_{pq},\vec{n}_r\rangle=\left\langle \Gamma_{pq}^{k}x_k+L_{pq}\vec{n},L_r^j x_j\right\rangle=\left\langle \Gamma_{pq}^{1}x_1+\Gamma_{pq}^{2}x_2,L_r^1 x_1+L_r^2 x_2\right\rangle$$

שוב, כי הנורמל מאונך לוקטורי הנגזרות. אם כן:

$$\langle x_{pq},\vec{n}_r\rangle=\Gamma_{pq}^{k}L_r^j g_{jk}=-\Gamma_{pq}^{k}L_{rk}$$

בסך הכל:

$$\langle x_{pqr},\vec{n}\rangle=\frac{\partial}{\partial u_r}\left\langle x_{pq},\vec{n}\right\rangle-\langle x_{pq},\vec{n}_r\rangle=L_{pq,r}+\Gamma_{pq}^{k}L_{rk}$$

ד. $g_{pq}\delta_s^q g^{su}\delta_u^p$.

<u>פתרון:</u>

מהגדרת הדלתא של קרונקר:

$$g_{pq}\delta_s^q=g_{ps},g^{su}\delta_u^p=g^{sp}$$

לכן הביטוי שווה ל:

$$g_{ps}g^{sp}=g_{11}g^{11}+g_{12}g^{21}+g_{21}g^{12}+g_{22}g^{22}=1+1=2$$

שוב, כי המטריצות הופכיות.

5. נניח שמשטח מקיים $g_{12}=L_{12}=0$.

א. תנו הגדרה מפורטת של העקמומיות הראשיות k_1,k_2.

<u>פתרון:</u>

העקמומיות הראשיות הן הערכים העצמיים של העתקת ויינגרטן. במקרה שלנו:

$$W=-\begin{pmatrix} g^{11} & 0\\ 0 & g^{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_{11} & 0\\ 0 & L_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -g^{11}L_{11} & 0\\ 0 & -g^{22}L_{22}\end{pmatrix}$$

מכיוון ש$-$ $g_{12}=L_{12}=0$ (ולכן גם $g_{21}=L_{21}=0$). כלומר, במקרה זה:

$$k_i=-g^{ii}L_{ii}$$

ב. בטאו את העתקת ויינגרטן על ידי מטריצה באמצעות מקדמי התבניות הראשונה והשנייה.

<u>פתרון:</u>

שוב,

$$W=\begin{pmatrix} -g^{11}L_{11} & 0\\ 0 & -g^{22}L_{22}\end{pmatrix}$$

ג. חשבו את היחס $\frac{k_1}{k_2}$ באמצעות מקדמי התבניות הראשונה והשנייה.

<u>פתרון:</u>

מהסעיף הראשון,

$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{g^{11}L_{11}}{g^{22}L_{22}}$$

ד. מצאו את היחס $\frac{k_1}{k_2}$ במקרה של משטח סיבוב המתקבל על ידי סיבוב של פרבולה $x=z^2+\frac{1}{4}$ סביב ציר ה$-z$.

<u>פתרון:</u>

פרמטריזציה של העקומה היא:

$$\gamma\left(\phi\right)=\left(\phi^2+\frac{1}{4},0,\phi\right)$$

פרמטריזציה של משטח הסיבוב היא:

$$r\left(\theta,\phi\right)=\left(\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)\cos\theta,\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)\sin\theta,\phi\right)$$

הנגזרות הן:

$$r_\theta=\left(-\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)\sin\theta,\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)\cos\theta,0\right)$$

$$r_\phi = (2\phi\cos\theta, 2\phi\sin\theta, 1)$$

נחשב את הנורמל:

$$r_\theta \times r_\phi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)\sin\theta & \left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)\cos\theta & 0 \\ 2\phi\cos\theta & 2\phi\sin\theta & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)\cos\theta, \left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)\sin\theta, -2\phi\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)\right)$$

הנורמה היא:

$$\sqrt{\left(\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)\cos\theta\right)^2 + \left(\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)\sin\theta\right)^2 + \left(-2\phi\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(4\phi^2+1)\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^2} = 2\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$$

לכן הנורמל הוא:

$$\vec{n} = \frac{r_\theta \times r_\phi}{\|r_\theta \times r_\phi\|} = \frac{1}{2\sqrt{\phi^2+\frac{1}{4}}}(\cos\theta, \sin\theta, -2\phi)$$

הנגזרות של הנורמל הן:

$$\vec{n}_\theta = \frac{1}{2\sqrt{\phi^2+\frac{1}{4}}}(-\sin\theta, \cos\theta, 0) = \frac{1}{2\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot r_\theta + 0 \cdot r_\phi$$

$$\vec{n}_\phi = \left(-\frac{\phi\cos\theta}{2\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{\phi\sin\theta}{2\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{1}{4\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}\right) = 0 \cdot r_\theta - \frac{1}{4\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot r_\phi$$

לכן:

$$W = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$$

ונקבל שהיחס הוא:

$$\frac{k_1}{k_2} = -2$$