אינפי II תרגולים - תרגול X

טורי פונקציות

תזכורת

* יהי $\{f_n(x)\}$ סדרת פונ' המוגדרת בקטע I. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ נקרא **טור פונקציות**.
* בכל נק' $x_0 \in I$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ הינו טור מספרים. נסמן את **סדרת הסכומים החלקיים** כ- $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ ואת **פונ' הסכום** (אם קיים)

$$S(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

אזי:

הטור מתכנס נקודתית $\Longleftrightarrow$ $\{S_n(x)\}$ מתכנסת נקודתית
הטור מתכנס במ"ש ב-I $\Longleftrightarrow$ $\{S_n(x)\}$ מתכנסת במ"ש ב-I

= סוף תזכורת =

תרגיל

מצאו את תחומי ההתכנסות של הטורים הבאים:

I) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+x^2)^n}$

II) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2-n+1}$ (אם יש זמן)

I) יהי $x_0 \in \mathbb{R}$. נבדוק מתי טור המספרים $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+x_0^2)^n}$ מתכנס.

נשתמש במבחן המנה עבור טור מספרים:

תזכורת: מבחן המנה: יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור אי-שלילי, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=q$ אזי:
- $q<1 \Rightarrow$ הטור מתכנס
- $q>1 \Rightarrow$ הטור מתבדר
- $q=1 \Rightarrow$ לא ניתן לקבוע

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)(1+x_0^2)^{n+1}}}{\frac{1}{n(1+x_0^2)^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n\cancel{(1+x_0^2)^n}}{(n+1)(1+x_0^2)^{\cancel{n+1}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x_0^2}\cdot\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+x_0^2}$$

מבחן דלמבר אומר שהתכנסות קורת אם $\frac{1}{1+x_0^2}<1$ ולכן יש התכנסות ב-$\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

ב-$x_0=0$ נקבל שהגבול הוא 1 ולכן נגיע לקריטי לפי מבחן דלמבר. לכאורה אבל, נקבל את הטור ההרמוני, שהוא מתבדר.

$\boxed{II}$ יהי $x_0\in\mathbb{R}$. נבדוק שוב לאלו התכנסות של טור המספרים $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx_0}}{n^2-n+1}$:

נשתמש במבחן דלמבר שוב:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{e^{(n+1)x_0}}{(n+1)^2-(n+1)+1}}{\frac{e^{nx_0}}{n^2-n+1}}=\lim_{n\to\infty}e^{x_0}\cdot\frac{n^2-n+1}{n^2+2n+1-n-1+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{x_0}\cdot\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}=e^{x_0}$$

ממבחן דלמבר נקבל התכנסות כאשר $e^{x_0}<1$, כלומר $x<0$ והתבדרות עבור $e^{x_0}>1$,

כלומר $x>0$. ב-$x_0=0$ נקבל $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-n+1}$ אשר מתכנס ממבחן

ההשוואה הגבולי לטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

הטור מתכנס ב-$(-\infty,0]$

<u>הגדרה</u>

בהינתן הטור $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$, ההפרש $r_n(x)=S(x)-S_n(x)$ נקרא השארית של הטור

נשען מזמן ה- lim-sup נסיק:

<u>משפט</u> (קריטריון קושי להתכנסות טור פו')

הטור $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ מתכנס במ"ש ב-I $\iff$ $\lim_{n\to\infty}\left[\sup_{x\in I}|r_n(x)|\right]=0$

<u>בטור מספרים</u>: הטור $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ מתכנס $\iff$ $\lim_{n\to\infty}r_n=0$

תרגיל

קבעו התכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$

נשתמש בקריטריון קושי להתכנסות: נשים לב כי לכל $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$|r_n(x_0)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\cos(kx_0)}{k^2} \right| \underset{\text{אי"ש המשולש}}{\le} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{\cos(kx_0)}{k^2} \right| \le \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{\text{שארית של טור מתכנס.}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ולכן בפרט $\lim_{n\to\infty} \left[\sup_{x\in\mathbb{R}} |r_n(x)|\right] = 0$ ולפי קריטריון קושי, הטור מתכנס במ"ש בכל הישר הממשי.

משפט (מבחן ה-M של ויירשטראס)

אם קיימת סדרה $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ כך ש- $\forall x\in I: |f_n(x)| \le M_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש ב-I.

תרגיל

הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty} x^k(1-x)^k$ מתכנס במ"ש ב-$[0,1]$

נשים לב כי בתחום $[0,1]$ מתקיים $|x^k(1-x)^k| = x^k(1-x)^k$.

כעת, נמצא מקס' של $x(1-x) = x - x^2$ ב-$[0,1]$ (ע"י חקירת פו'):

$$(x-x^2)' = 1-2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$(x-x^2)'' = -2 < 0 \Rightarrow$$ $x=\frac{1}{2}$ מקס' של $x-x^2$ ב-$[0,1]$

ולכן לכל $x\in[0,1]$ מתקיים: $0 \le x - x^2 \le \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

בפרט $\forall k\in\mathbb{N}, x\in I: 0 \le x^k(1-x)^k = (x(1-x))^k \le \left(\frac{1}{4}\right)^k =$

אזי נבחר $\forall n\in\mathbb{N}: M_n = \frac{1}{4^n}$. מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} < \infty$ ולכן לפי

מבחן ה-M של ויירשטראס הטור מתכנס

$\square$

תרגיל

הוכיחו כי אם $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס בהחלט (כלומר מה־) אז $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ מתכנס במ"ש בכל $\mathbb{R}$ (כלומר כדי)

נשתמש שוב במבחן ה-M של ויירשטרס:

$$\forall x\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{N}:\quad |a_k\cos kx| = |a_k|\cdot|\cos kx| \underset{0\le|\cos kx|\le 1}{\le} |a_k|$$

אז נגדיר $M_n=|a_n|$ $\forall n\in\mathbb{N}$. מתקיים עבורם $\sum_{n=1}^{\infty} M_n=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$ (כי נתון שהטור מתכנס בהחלט) ולכן לפי מבחן ה-M של ויירשטרס הטור שלנו מתכנס במ"ש בכל $\mathbb{R}$ $\square$

משפט

יהי $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ טור פו' רציפות (המתכנס) במ"ש ב-I לפו' הסכום $S(x)$. אזי: $S(x)$ רציפה ב-I

תרגיל

הוכיחו שהפו' $S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2x}{1+k^7x^2}$ רציפה בכל $\mathbb{R}$.

נראה שהטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2x}{1+k^7x^2}$ מתכנס במ"ש בכל $\mathbb{R}$:

נחפש מקס' של $f_k(x)$ לכל $k\in\mathbb{N}$:

$$f_k'(x)=\left(\frac{k^2x}{1+k^7x^2}\right)'=\frac{k^2(1+k^7x^2)-2xk^7\cdot k^2x}{(1+k^7x^2)^2}=\frac{k^2(1-k^7x^2)}{(1+k^7x^2)^2}=0$$

$$\Updownarrow$$

$$x=\pm\frac{1}{k^{\frac{7}{2}}} \iff (1-k^7x^2)=0$$

$f_k(x)$ פו' אי-זוגית (כי לפחות מחזירה של x) אז קל לראות שהפו' מקבלת מקס' ב- $x=\frac{1}{k^{\frac{7}{2}}}$ ומינ' ב- $x=-\frac{1}{k^{\frac{7}{2}}}$

$$\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}\ k\in\mathbb{N}:\ |f_k(x)|\le\left|\frac{k^2\cdot\frac{1}{k^{\frac{7}{2}}}}{1+k^7\cdot\frac{1}{k^7}}\right|=\frac{1}{2k^{\frac{3}{2}}}=M_k$$

בנוסף, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k^{\frac{3}{2}}}=\frac12\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ מתכנס ולכן לפי מבחן ה-M של ויירשטרס הטור שלנו מתכנס במ"ש ב-$\mathbb{R}$. כיוון ש-$f_k(x)$ רציפות אזי גם $S(x)$ רציפה ב-$\mathbb{R}$.

$\square$

<u>שימו ♡:</u> ההפך אינו נכון! טור שהוא מתכנס יתכן לא במ"ש לפי בדיקה בגבולות.

למשל: $\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}$ והוא כן רציפה ב-$(-1,1)$ אך הטור אינו מתכנס במ"ש שם.

<u>משפט</u> (מבחן דיריכלה)

אם בקטע I מתקיים:

(i) $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k(x)$ חסומה במשותף, כלומר $|S_n(x)|<M$ לכל $n\in\mathbb{N}, x\in I$

(ii) $\{b_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה מונוטונית (עולה/יורדת) שמתכנסת במ"ש ל-0

אזי הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\, b_k(x)$ מתכנס במ"ש ב-I.

הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+x}}$ מתכנס במ"ש ב-$[1,100]$ כי:

(i) $\forall n\in\mathbb{N}: \left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\right| < 2$

(ii) $\forall x\in[1,100]$: בנוסף $b_n(x)=\frac{1}{\sqrt{k+x}}$ מונוטונית ושואפת במ"ש ל-0 (מ' בינ')

<u>אינטגרציה וגזירה איבר-איבר בטורי פונקציות</u>

<u>משפט</u> (אינטגרציה איבר-איבר)

⊛ אם $f_n(x)\to f(x)$ במ"ש ו-f_n אינטג' ב-$[a,b]$ אזי:

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$$

שימו ♡: כעת הגרסה לטורים

⊛ אם $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ במ"ש ו-f_n אינטג' ב-$[a,b]$ אזי:

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)$$

<u>תרגיל</u>

חשבו את $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$

נתבונן בטור הנ"ל $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ בקטע $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. הטור מתכנס במ"ש ל-$\frac{1}{1-x}$ בקטע (לפי מבחן ה-M של ויירשטראס) ולכן ניתן לבצע אינטגרציה איבר-איבר:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}\,dt \underset{\text{אינט' איבר-איבר}}{=} \int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}\right)dt \underset{-\frac12\le t\le\frac12}{=} \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt=-\ln|1-t|\Big|_0^x=$$

$$=-\ln|1-x|$$

עבור $x=\frac13$ נקבל:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}=-\ln\left|1-\frac13\right|=\ln\frac32$$

תרגיל

חשב את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)x^n}$ עבור $x>1$

פתרון, נשים לב כי $\frac{n}{(n+1)x^n}=\frac{1}{x^n}-\frac{1}{(n+1)x^n}$, ולכן נחשב בנפרד את $\overbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}}^{I}-\overbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)x^n}}^{II}$

⊛ I הוא טור הנדסי וכיוון ש-$x>1$ אז הוא מתכנס ולפי נוסחה:

$$I=\frac{\frac1x}{1-\frac1x}=\frac{1}{x-1}$$

⊛ נחשב את II:

$$II=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)x^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac1x\right)^n$$

נשים לב כי

$$\frac{1}{(n+1)}\cdot\left(\frac1x\right)^n=x\cdot\left(\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac1x\right)^{n+1}\right)=x\cdot\int_0^{\frac1x}t^n\,dt$$

אבל נראה שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}t^n$ מתכנס במ"ש ב-$[0,\frac1x]$ עבור $x>0$:

$$\forall t\in\left[0,\frac1x\right]:\ |t^n|\le\left(\frac1x\right)^n$$

ו-$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac1x\right)^n<\infty$ כי זהו טור הנדסי עבור $0<\frac1x<1$ ולכן לפי מבחן ה-M של ויירשטראס

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}t^n$ מתכנס במ"ש ב-$[0,\frac1x]$.

כעת נבצע אינט' איבר-איבר:

$$II=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac1x\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}x\left(\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac1x\right)^{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}x\int_0^{\frac1x}t^n\,dt \underset{\text{אינט' איבר-איבר}}{=} x\int_0^{\frac1x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^n\right)dt=$$

$$=x\int_0^{\frac1x}\frac{t}{1-t}\,dt=x\int_0^{\frac1x}\left(-1+\frac{1}{1-t}\right)dt=x\cdot\Big[-t-\ln|1-t|\Big]_0^{\frac1x}=$$

$$=x\left[-\frac1x-\ln\left|1-\frac1x\right|\right]\underset{x>1}{=}-1-x\ln\left(1-\frac1x\right)$$

לסיכום:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)x^n}=\frac{1}{x-1}+1+x\ln\left(1-\frac1x\right)$$

משפט (גזירה איבר-איבר)

⊛ תהי f_n סדרת פו' גזירות ו- f_n' סדרת פו' מתכנסת במ"ש. בנוסף יש לפחות נק' אחת c שבה הסדרה $f_n(c)$ מתכנסת נקודתית. אזי f_n מתכנסת במ"ש ל- f ומתקיים $f_n' \longrightarrow f'$

⊛ תהי f סדרת פו' גזירות ו- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ טור פו' מתכנס במ"ש, ובנוסף יש לפחות נק' אחת c שבה הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$ מתכנס כטור מספרים. אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ מתכנס במ"ש ומתקיים: $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$

תרגיל

חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$ עבור $x>1$

נגדיר $f_n(x) = \frac{1}{x^n}$. $f_n(x)$ היא סדרת פו' גזירות בתחום ובנוסף

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n' = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n}{x^{n+1}}$$

עבור $x_0>1$ ספציפי, קיים (נבחר) $1<a<x_0$ אזי $\left|-\frac{n}{x_0^{n+1}}\right| < \frac{n}{a^{n+1}}$ והטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^{n+1}}$ מתכנס (מבחן המנה) - לכן לפי מבחן ה- M של ויירשטראס הטור מתכנס במ"ש בכל קטע $[a,\infty)$ עבור $a>1$

$\Downarrow$

טור הנגזרות מתכנס במ"ש לכל $x>1$

בנוסף, אם נבחר $C=10$, נקבל כי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} < \infty$ ולכן ניתן לגזור איבר-איבר:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}\right)' \underset{\text{גזירה איבר-איבר}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n}{x^{n+1}} = -\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n} = -x\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}\right)'$$

מתקיים כי:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}\right)' = \left(\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)' = \left(\frac{1}{x-1}\right)' = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

$\Downarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n} = \frac{x}{(x-1)^2}$$

תרגיל

תהי $f(x)$ מוגדרת ע"י $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^3}$ לכל $x\in\mathbb{R}$. הוכיחו

א. $f(x)$ מוגדרת היטב (כלומר הטור מתכנס לכל $x\in\mathbb{R}$)

ב. $f(x)$ גזירה בכל $x\in\mathbb{R}$

ג. $f'(x)$ רציפה בכל $x\in\mathbb{R}$

א. לכל $x_0\in\mathbb{R}$ מתקיים $\left|\frac{\cos(nx)}{n^3}\right|\le\frac{1}{n^3}$ והטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ מתכנס, ולכן ממבחן ה-M של ויירשטראס $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^3}$ מתכנס במ"ש בכל $\mathbb{R}$ $\square$

ב. סדרת הפונ' $f_n(x)=\frac{\cos(nx)}{n^3}$ גזירה והטור $\sum_{n=1}^{\infty}f_n'=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{\sin(nx)}{n^2}$

מתכנס במ"ש לפי מבחן ה-M של ויירשטראס (כמו בסעיף קודם). הטור $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$

מתכנס במ"ש בכל $\mathbb{R}$ ולכן ישנה נק' $c\in\mathbb{R}$ (למעשה כל $c\in\mathbb{R}$) שבה הטור

מתכנס נקודתית. לכן מגזירה איבר-איבר נקבל:

$$\forall x\in\mathbb{R}:\quad f'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)$$

כלומר f גזירה ב-$\mathbb{R}$ $\square$

ג. מסעיף קודם קיבלנו ש- $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\sin(nx)}{n^2}$

אם נסתכל על סדרת הסכומים החלקיים $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{-\sin(kx)}{k^2}$, זוהי סדרת פונ' רציפות

(כי $S_n(x)$ הוא סכום סופי של פונ' רציפות) המתכנסת במ"ש לפונ' הגבול

$S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k'(x)=f'(x)$, ולכן פונ' הגבול היא רציפה $\square$