בוחן בטופולוגיה

21.05.2017

מתרגלים: אלעד אטיא, תמר בר און, שירה גילת.
יש לענות על כל השאלות.
בהצלחה:)

1. תהי X קבוצת כל הסדרות שרכיביהן באים מ: $\{0,1,2,...\}$. נגדיר על X את המטריקה הבאה: (אין צורך להוכיח שזו מטריקה)
$d((x_n),(y_n)) = 0$ אם שתי הסדרות שוות, ואחרת $d((x_n),(y_n)) = \dfrac{1}{m}$, עבור $m = \min\{i : x_i \neq y_i\}$. כלומר, האינדקס הראשון שבו הן שונות.
   (א) (15 נקודות) הוכיחו שקבוצת הסדרות שמתחילות ב$0,5,6$ או ב $1,2,9,8$ היא פתוחה.
   (ב) (15 נקודות) מצאו את הסגור של קבוצות הסדרות הקבועות לבסוף על 2.
   (ג) (15 נקודות) הוכיחו/ הפריכו: פונקציית ההטלה על הרכיב הi $\Pi_i : X \to \mathbb{N}$ היא פונקציה רציפה. (כאשר $\mathbb{N}$ עם הטופולוגיה הדיסקרטית.)

2. נתבונן בקבוצת המספרים השלמים $\mathbb{Z}$, ולכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר: $O_n = \{n, n+1, n+2...\}$. נסתכל על האוסף $\tau = \{O_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{Z}\}$.
   (א) (15 נקודות) הוכיחו שτ הוא טופולוגיה על $\mathbb{Z}$.
   (ב) (15 נקודות) הוכיחו שτ אינו מטריזבילי.
   (ג) (15 נקודות) הוכיחו שלכל סדרה מתכנסת במרחב הזה יש אינסוף גבולות.

3. (25 נקודות) תהיינה d, ρ מטריקות שקולות על קבוצה X. נניח שהמרחב (X,d) שלם. הוכיחו או הפריכו: המרחב (X,ρ) שלם.