תרגיל 10

1. בתרגיל הקרוב נראה שמכפלה אינסופית של קבוצות קומפקטית סדרתית לאו דווקא קומפקטית סדרתית. נזכיר שמרחב הוא קומפקטי סדרתית אם לכל סדרה יש תת סדרה מתכנסת. נראה בנוסף שמרחב קומפקטי הוא לאו דווקא קומפקטי סדרתית. נסמן את קבוצת קנטור כ- $C := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ונסתכל על המרחב $X := \{0,1\}^C$ עם טופולוגיית המכפלה. כלומר, זה מרחב הפונקציות הבינאריות על קבוצת קנטור עם טופולוגיית ההתכנסות הנקודתית. לכל $n_0 \in \mathbb{N}$ נגדיר $\rho_{n_0} \in X$ ע"י

$$\rho_{n_0}\Big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big) = a_{n_0}$$

הראו של-$X \supseteq \{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ אין תת סדרה מתכנסת.

2. בתרגיל הבא $\hat{X}$ יסמן את קומפקטיפיקציית הנקודה של X.

(א) הוכיחו כי $\mathbb{Q}$ אינו קומפקטי מקומי והסיקו כי $\hat{\mathbb{Q}}$ אינה T_2.

(ב) הוכיחו כי ב $\hat{\mathbb{Q}}$ כל קבוצה היא סגורה אמ"מ היא קומפקטית.

3.

(א) נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{R}^2$ ע"י: $(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2) \iff x_1 + y_1^2 = x_2 + y_2^2$.
הוכיחו ש $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2/\sim$. רמז: מצאו את ההעתקה ההפוכה ל$\hat{f}$ מ$\mathbb{R}$ ל- $\mathbb{R}^2/\sim$.

(ב) נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{R}^2$: $(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2) \iff x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$. למה הומיאומורפי $\mathbb{R}^2/\sim$?

4. יהי X מרחב המנה של $\mathbb{R}$ המתקבל ע"י זיהוי כל הנקודות מנורמה גדולה שווה מ1. כלומר $x \sim y$ אם ורק אם $x = y$, או ש $|x| \geq 1 \wedge |y| \geq 1$. הוכיחו ש

$$X \cong S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

5. הוכיחו שפונקציית מנה חח"ע היא הומיאומורפיזם.

6. תנו דוגמא לפונקציה רציפה, על ופתוחה שאינה סגורה, ולפונקציה רציפה, על וסגורה שאינה פתוחה.

7. נסתכל על הספרה החד ממדית $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ עם יחס השקילות $\sim$ שמוגדר ע"י

$$x \sim y \iff (x = y) \vee (x = -y)$$

הראו ש-$S^1 / \sim$ הומיאומורפי ל-S^1.

8. נסתכל על $X := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ עם יחס השקילות $\sim$ שמוגדר ע"י

$$x \sim y \iff \exists 0 \neq \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y$$

כלומר, מזהים יחד את כל הנקודות על ישרים שעוברים דרך הראשית. הישר הפרויקטיבי מוגדר להיות $\mathbb{RP}^1 := X / \sim$. הראו ש-$\mathbb{RP}^1$ הומיאומורפי לספירה S^1