פתרון תרגיל 9 מבוא לתורת החבורות תשע"ט

שאלה 1. יהי $f:\mathbb{Z}_{14}\to D_{10}$ הומומורפיזם. אפיינו את $\ker f$ (עד כדי איזומורפיזם).

פתרון. (label=.). נסמן $K=\ker f$. מכיוון ש-$K\lhd\mathbb{Z}_{14}$, אז $|K|\,|\,|\mathbb{Z}_{14}|=14$. לכן $|K|\in\{1,2,7,14\}$. נבדוק עבור כל מקרה.

פתרון. אם $|K|=1$, אז f הוא חח"ע וממשפט האיזומורפיזם הראשון נקבל $f\cong\mathbb{Z}_{14}/K$. לכן $f\cong\mathbb{Z}_{14}$. ידוע לנו כי $f\leq D_{10}$ ולכן $|f|\,|\,|D_{10}|=20$. אבל 14 אינו מחלק את 20, ולכן $|K|\neq 1$.

אם $|K|=2$, אז בדומה לחישוב הקודם נקבל

$$|f|=|\mathbb{Z}_{14}/K|=\frac{|\mathbb{Z}_{14}|}{|K|}=7$$

ושוב מפני ש-7 אינו מחלק את 20 נסיק כי $|K|\neq 2$.

אם $|K|=7$, נראה כי קיים הומומורפיזם כזה. ניקח תת־חבורה $H=\{,\tau\}$ (כל תת־חבורה מסדר 2 תתאים) של D_{10}, ונבנה אפימורפיזם $\mathbb{Z}_{14}\to H\leq D_{10}$. המספרים האי זוגיים ישלחו ל-τ, והזוגיים לאיבר היחידה. כמו כן, כיוון שהגרעין הוא מסדר ראשוני, אז $K\cong\mathbb{Z}_7$.

אם $|K|=14$, אז נקבל $K=\mathbb{Z}_{14}$. תוצאה זאת מתקבלת עבור ההומומורפיזם הטריוויאלי.

שאלה 2. יהי $n\geq 3$ טבעי. מצאו את $Z\left(D_n\right)$.

פתרון. לכל איבר $a\in D_n$ אפשר לרשום: $a=\tau^i\sigma^j$ כאשר $0\leq i\leq 1,\ 0\leq j\leq n-1$.

$a\in Z\left(D_n\right)$ פירושו שלכל $g\in D_n$ מתקיים: $ag=ga$. החבורה D_n נוצרת על ידי האיברים σ,τ ולכן כדי להראות ש: $a\in Z\left(D_n\right)$ מספיק להראות: $a\sigma=\sigma a,\ a\tau=\tau a$.

נרשום את a כמו שאמרנו, והשוויון הימני נותן: $\tau^i\sigma^j\sigma=\sigma\tau^i\sigma^j$. נכפול מימין ב-$\sigma^{-j}$ ונקבל: $\tau^i\sigma=\sigma\tau^i$; אנחנו יודעים שמתקיים: $\tau\sigma\neq\sigma\tau$, ונקבל שבהכרח: $i=0$, כלומר $a=\sigma^j$.

כעת, נשתמש בשוויון השני: $a\tau=\tau a$ ונקבל: $\sigma^j\tau=\tau\sigma^j$. אנו יודעים ש: $\sigma\tau\sigma=\tau$ (כי $\left(\tau\sigma\right)^2=e$) ולכן גם $\sigma^j\tau\sigma^j=\tau$. נכפיל את השוויון $\sigma^j\tau=\tau\sigma^j$ ב-σ^j משמאל ונקבל: $\sigma^{2j}\tau=\tau$, כלומר $\sigma^{2j}=e$.

קיבלנו שתי אפשרויות: $j=0$ ואז $a=e$ או – אם n זוגי – $j=\frac{n}{2}$ ואז $a=\sigma^{\frac{n}{2}}$ או $a=e$. סה"כ:

$$Z\left(D_n\right)=\begin{cases}\{e\} & n=2j+1\\ \{e,\sigma^j\} & n=2j\end{cases}$$

שאלה 3. תרגיל מאתגר ומעניין – מצאו שתי חבורות H,G שאינן איזומורפיות, אך קיימים שיכונים $G\hookrightarrow H,\ H\hookrightarrow G$.

שאלה 4. תהי $G_1\subseteq G_2\subseteq G_3\subseteq\ldots$ שרשרת עולה של חבורות פשוטות. הוכיחו שגם האיחוד: $G=\bigcup G_i$ הוא חבורה פשוטה.

פתרון.

ראשית, בדקו שאתם מבינים למה G חבורה.

תהי $N \lhd G$ נורמלית, נראה שהיא טריוויאלית.
לכל i, מתקיים: $N \cap G_i \lhd G_i$; מכיוון שהחבורה G_i פשוטה, $N \cap G_i$ היא טריוויאלית.
כלומר, $N \cap G_i = G_i$ או $N \cap G_i = \{e\}$.
אם לכל i מתקיים: $N \cap G_i = \{e\}$, נקבל:

$$N = N \cap G = N \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (N \cap G_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{e\} = \{e\}$$

ו-N אכן טריוויאלית.
אחרת, נסמן ב-j את האינדקס המינימלי עבורו: $N \cap G_j = G_j$. לכל $j < k$ מתקיים $G_j \subseteq G_k$, לכן: $G_j = N \cap G_j \subseteq N \cap G_k$. מכיוון ש: $N \cap G_k = G_k$ או $N \cap G_k = \{e\}$, נקבל שבהכרח $N \cap G_k = G_k$. נקבל:

$$N = N \cap G = N \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (N \cap G_i) = \bigcup_{i=j}^{\infty} G_i = G$$

ושוב, N טריוויאלית.