תרגול השלמה

$201 - 88$ תשע"ח סמסטר ב'

תזכורת 1

א. התחלנו משטחים קצת לפני הבוחן וראינו: הגדרת משטח רגולרי, משטח סיבוב, תבנית יסודית ראשונה.

ב. עבור משטח סיבוב של העקומה $\alpha(\phi) = (r(\phi), 0, z(\phi))$ מתקיים

$$(g_{ij}(\theta, \phi)) = \begin{pmatrix} r^2(\phi) & 0 \\ 0 & \left|\frac{d\alpha}{d\phi}\right|^2 \end{pmatrix}$$

תזכורת 2 מאז הבוחן ראינו את הנושאים הבאים:

א. מדידות על משטחים:

אורך עקומה

$$L(\beta) = \int_a^b \sqrt{g_{ij}\frac{d\alpha^i}{dt}\frac{d\alpha^j}{dt}}dt$$

שטח

$$area(D) = \int_U dA = \int_U \sqrt{|(g_{ij})|}du^1du^2$$

באשר $x : U \to D \subset \mathbb{R}^3$.

ב. סמלי גמא:

הגדרה:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j} = x_{ij} = \Gamma^1_{ij}x_1 + \Gamma^2_{ij}x_2 + L_{ij}n = \Gamma^k_{ij}x_k + L_{ij}n$$

חישוב:

(א) מטריקה כללית

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}(g_{i\ell;j} - g_{ij;\ell} + g_{j\ell;i})g^{\ell k}$$

(ב) מטריקה אלכסונית

$$\Gamma_{ij}^\kappa = \frac{1}{2}(g_{i\kappa;j} - g_{ij;\kappa} + g_{j\kappa;i})g^{\kappa\kappa}$$

(שימו לב: אסור להופיע קו תחתון מתחת ל-k, שכרגע לא מופיע בגלל מגבלה טכנית.)

(ג) מטריקה $(g_{ij}) = \lambda(u^1, u^2)(\delta_{ij})$ שקולה קונפורמית לשטוחה סטנדרטית (קואורדינטות איזותרמיות) עם גורם קונפורמי $\lambda(u^1, u^2) > 0$:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\lambda_1}{2\lambda}, \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{-\lambda_1}{2\lambda}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{\lambda_2}{2\lambda}$$
$$\Gamma_{11}^2 = \frac{-\lambda_2}{2\lambda}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{\lambda_2}{2\lambda}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{\lambda_1}{2\lambda}$$

באשר $\lambda_i = \frac{\partial\lambda}{\partial u^i}$.

(ד) עבור משטח סיבוב

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = 0, \qquad \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\phi}$$

ג. קווים גאודזים:

(א) לכל עקומה $\beta = x \circ \alpha$ מתקיים

$$\beta'' = \left(\alpha^{i'}\alpha^{j'}\Gamma_{ij}^k + \alpha^{k''}\right)x_k + \left(L_{ij}\alpha^{i'}\alpha^{j'}\right)n$$

(ב) הגדרת קו גאודזי: β'' מאונך למשטח, או באופן שקול, מתקיימות המשוואות הגיאודזיות:

$$\alpha^{i'}\alpha^{j'}\Gamma_{ij}^k + \alpha^{k''} = 0$$

לכל $k = 1, 2$.

(ג) עקומה גיאודזית היא במהירות קבועה כלומר $|\beta'|$ קבוע, כלומר $|\beta'|^2$ קבוע, כלומר

$$\frac{d\alpha^i}{ds}\frac{d\alpha^j}{ds}g_{ij} = C$$

כלומר

$$\left(\frac{d\alpha^1}{ds}\right)^2 g_{11} + 2\frac{d\alpha^1}{ds}\frac{d\alpha^2}{ds}g_{12} + \left(\frac{d\alpha^2}{ds}\right)^2 g_{22} = C$$

לפעמים נוסיף משוואה זו כמשוואה שלישית כדי לעזור לפתור את המשוואות הגאודזיות.

תרגיל 1 נתון המשטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ עם פרמטריזציה $x : U \to \mathbb{R}^3$ כאשר

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ y > 0\right\}$$

עם המטריקה

$$(g_{ij}) = \frac{1}{y^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ונתונה עקומה $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$. חשבו את האורך של העקומה $\beta = x \circ \alpha$.

פתרון 1 מתקיים $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t)$ כלומר

$$\begin{aligned} L(x \circ \alpha) &= \int \sqrt{\frac{d\alpha^i}{dt}\frac{d\alpha^j}{dt} g_{ij}(\alpha(t))} dt \\ &= \int \sqrt{(-\sin t)^2 \frac{1}{\sin^2 t} + (\cos t)^2 \frac{1}{\sin^2 t}} dt = \int \frac{1}{\sin t} dt \end{aligned}$$

כדי לחשב את $\int \frac{1}{\sin t} dt$ ניתן למשל להשתמש בהצבה האוניברסלית $t = \tan\frac{x}{2}$ שפותרת כל אינטגרל מהצורה $\int R(\sin x, \cos x) dx$ כאשר R פונקציה רציונלית. הנוסחאות הן:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}$$

אצלנו

$$\int \sin^{-1} t dt = \int \frac{1+w^2}{2w} \frac{2}{1+w^2} dw = \int w^{-1} dw = \log(w) + C = \log\tan\frac{t}{2} + C$$

כלומר

$$L(\beta) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin^{-1} t dt = \log\tan\frac{\pi}{3} - \log\tan\frac{\pi}{6} = \log 3$$

תרגיל 2 בהמשך לתרגיל הקודם, חשבו את השטח של פרמטריזציה x בתחום D, כאשר

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \quad x^2 + y^2 > 1, \quad y > 0\right\}$$

פתרון 2 אלמנט השטח

$$dA = \lambda du^1 du^2 = y^{-2} dx dy$$

לכן

$$\begin{aligned}
area(x\circ D) &= \iint_D dA = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} y^{-2}dy\right)dx \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(\frac{1}{2}) - \arcsin(-\frac{1}{2}) \\
&= \frac{\pi}{6} - \frac{-\pi}{6} = \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

תרגיל 3 בקואורדינטות $(u^1,u^2)=(x,y)$ מיצאו את הקווים הגאודזים של משטח בעל המטריקה

$$(g_{ij}(x,y)) = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

שימו לב שיש למצוא את הקווים עצמם, ולא רק את המשוואות. רמז: כדאי להשתמש בכך שהתנועה על הקווים היא במהירות קבועה, כלומר במשוואה $|\beta'|^2=c$.

פתרון 3 שבוע שעבר ראינו כי המשוואות הגאודזיות הן

$$\begin{cases} \frac{1}{y}x'y' + x'' = 0 \\ \frac{1}{2y}\left((y')^2-(x')^2\right) + y'' = 0 \end{cases}$$

באשר

$$x' = \frac{dx}{ds}, \quad y' = \frac{dy}{ds}.$$

כעת נוסיף גם את המשוואה $|\beta'|^2=c$:

$$y(x')^2 + y(y')^2 = c$$

כלומר קיבלנו את המערכת

$$\begin{cases} \frac{1}{y}x'y' + x'' = 0 \\ \frac{1}{2y}\left((y')^2-(x')^2\right) + y'' = 0 \\ y\left((x')^2+(y')^2\right) = c \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל $\frac{y'}{y} = \frac{-x''}{x'}$ כלומר $ln(y) = -ln(x') + ln(C_2)$ כלומר $x'y = C_2$.

נציב $x' = \frac{C_2}{y}$ במשוואה השלישית ונקבל $\frac{dy}{ds} = \frac{\sqrt{Cy-C_2^2}}{y}$.
כעת $\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dy} = \frac{x'}{y'} = \frac{C_2}{\sqrt{Cy-C_2^2}}$ לכן

$$x = \int dx = \int \frac{C_2 dy}{\sqrt{Cy-C_2^2}} = \frac{2C_2}{C}\sqrt{Cy-C_2^2} + C_3$$

כלומר

$$\alpha(s) = (\frac{2C_2}{C}\sqrt{Cs-C_2^2} + C_3, s)$$

ניתן גם מ־ $x = \frac{2C_2}{C}\sqrt{Cs-C_2^2} + C_3$ להגיע ל־

$$s = \frac{1}{C}\left(\frac{(x-C_3)C}{2C_2}\right)^2 + C_2^2 = a(x+b)^2 + c = y$$

באשר סימנו קבועים חדשים a, b, c. כלומר

$$\alpha(s) = (s, a(s+b)^2 + c)$$

כלומר אלה פרבולות.