אלגברה מופשטת 1, תרגיל בית 10

מתרגלים: סולי וישקאוצן ואדם צ'פמן. להגשה ב15.1 או ב18.1 בהתאם לשיעור התרגיל.

הגדרה: חבורה נקראת **פשוטה** אם אין לה תת-חבורות נורמליות לא טריוויאליות.

1) הוכח כי כל חבורה מסדר ראשוני היא פשוטה וציקלית ומצא את הסדר של האיברים שלה.

פיתרון: תהי G חבורה מסדר p ראשוני. נבחר איבר שאינו איבר היחידה $g \in G$ [ישנו כזה משום ש$p > 1$]. כעת, $o(g)$ מחלק את $|G|$, כלומר את p, אך p ראשוני ולכן $o(g) \in \{1, p\}$. אולם, g הוא לא איבר היחידה ולכן $o(g) \neq 1$, כלומר $o(g) = p$. משמע, $p = |<g>|$ ולכן $G = <g>$, כלומר G היא ציקלית.

תהי תת-חבורה $K \leq G$. אז $|K|$ מחלק את $|G|$, כלומר את p, ושוב מכיוון שp ראשוני מקבלים $|K| \in \{1, p\}$. אם $|K| = 1$ אז K מכילה את איבר היחידה בלבד, ואם $|K| = p$ אז $K = G$. בשני המקרים K היא תת-חבורה טריוויאלית, כלומר לG אין תת-חבורות לא טריוויאליות (ובפרט לא נורמליות) ולכן היא פשוטה.

2) הוכח כי כל חבורה אבלית מסדר לא ראשוני אינה פשוטה.

פיתרון: תהי G חבורה מסדר $n > 1$ לא ראשוני. נבחר איבר שונה מאיבר היחידה $g \in G$. אם $o(g) < n$ אז $<g>$ היא תת-חבורה לא טריוויאלית של G ובגלל האבליות של G, $<g>$ היא תת-חבורה נורמלית, ולכן G לא פשוטה.

אם $o(g) = n$ אזי ניקח מספר k (שונה מ1 ומn) המחלק את n, כלומר קיים $d \neq 1, n$ כך ש$n = kd$. כעת, $o(g^k) = d$ ולכן $<g^k>$ היא תת-חבורה נורמלית לא טריוויאלית של G, ולכן G לא פשוטה.

3) תהי חבורה מסדר ראשוני G ויהי איבר $y \in G$. מצאו מהו המסלול של y ומהו המייצב שלו כאשר פעולת החבורה על עצמה $\varphi : G \to S(G)$ היא.

a. $\varphi(g) = \pi$ כך ש $\pi(x) = gx$ לכל $x \in G$ ולכל $g \in G$.

b. $\varphi(g) = \pi$ כך ש $\pi(x) = gxg^{-1}$ לכל $x \in G$ ולכל $g \in G$.

פיתרון: בסעיף הראשון, $\theta_y = \{\varphi(g)(y) : g \in G\} = \{gy : g \in G\} = Gy = G$

$$St_y = \{g \in G : \varphi(g)(y) = y\} = \{g \in G : gy = y\} = \{g \in G : g = e\} = \{e\}$$

בסעיף השני, $\theta_y = \{\varphi(g)(y) : g \in G\} = \{gyg^{-1} : g \in G\} = conj(y)$.

$$St_y = \{g \in G : \varphi(g)(y) = y\} = \{g \in G : gyg^{-1} = y\} = \{g \in G : gy = yg\} = Z_y$$

4) הוכח כי A_5 [=חבורת התמורות הזוגיות בחמישה איברים] פשוטה.

[הדרכה: רשום את מבנה המחזורים האפשרי לאיברים ב A_5. הנח בשלילה כי קיימת $K \lhd A_5$. קח איבר כלשהו $x \in K$. מכיוון ש K נורמלית, אז היא מכילה את כל האיברים ששייכים למחלקת הצמידות של x. השתמשו בזה כדי להגיע לסתירה. תזכורת: A_n תמיד נוצרת ע"י המחזורים מאורך 3. מומלץ לקרוא את מערך תרגול כיתה 9 כפי שהועלה לאתר שכולל תרגילים דומים]

פיתרון: מבני המחזורים האפשריים עבור תמורה זוגית שאינה תמורת הזהות הם $(2,2,1)$, $(3,1,1)$ ו$(5,1,1)$. תהי $K \lhd A_5$.

נזכור את הנוסחה

$$\sigma\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k \end{pmatrix}\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(a_1) & \sigma(a_2) & \dots & \sigma(a_k) \end{pmatrix}.$$

נניח ש K מכילה תמורה עם מבנה מחזורים $(3,1,1)$, למשל את $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. אזי אם נצמיד את המחזור הזה במחזור $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ אז לפי הנוסחה נקבל $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. בפעולה זו שינינו בדיוק מספר אחד במחזור $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. באופן

דומה אפשר כל פעם לשנות מספר אחד וכך להגיע לכל המחזור מאורך 3. משמע, אם K מכילה מחזור מאורך 3 אז היא מכילה את כולם, ולכן $K = A_5$.

נניח שK מכילה תמורה עם מבנה מחזורים $(2,2,1)$, למשל את $(4 \quad 3)(2 \quad 1)$. אם נצמיד את התמורה הזאת בתמורה $(4 \quad 2 \quad 5 \quad 3 \quad 1)$ אז נקבל $(4 \quad 3)(5 \quad 1)$. משמע, שינינו בדיוק מספר אחד בתמורה. באופן דומה ניתן לשנות כל פעם מספר אחד בתמורה ולהגיע לכל תמורה עם מבנה מחזורים $(2,2,1)$. כלומר, אם K מכילה תמורה עם מבנה מחזורים $(2,2,1)$ אז היא מכילה את כולם. בפרט היא מכילה את המכפלה של $(4 \quad 3)(2 \quad 1)$ ו$(4 \quad 3)(5 \quad 1)$, שהיא שווה ל$(5 \quad 2 \quad 1)$, ולכן K מכילה את כל המחזורים מאורך 3 ולכן $K = A_5$.

אם K מכילה תמורה עם מבנה מחזורים $(5,1,1)$, למשל את $(a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5)$, אז היא גם מכילה את ההצמדה שלה בתמורה $(a_1 \quad a_2)(a_3 \quad a_4)$, שהיא $(a_2 \quad a_1 \quad a_4 \quad a_3 \quad a_5)$. משמע, היא גם מכילה את המכפלה שלהן $(a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5)(a_2 \quad a_1 \quad a_4 \quad a_3 \quad a_5) = (a_1 \quad a_5 \quad a_3)$ ולכן K מכילה את כל המחזורים מאורך 3 ולכן $K = A_5$.

לסיכום, אם K כוללת תמורה זוגית השונה מהיחידה אזי $K = A_5$, ולכן A_5 פשוטה.

5) הוכח או הפרך: $G/Z(G)$ אבלית אזי G אבלית. [תזכורת: $Z(G)$ זה המרכז של G, כלומר קבוצת כל האיברים שמתחלפים עם כל האיברים בG]

פיתרון: ישנן הרבה דוגמאות. אחת מהן הופיעה בתרגיל בית 5.

$G=\{1,-1,i,j,ij,-i,-j,-ij\}$ חבורה עם פעולת כפל המוגדרת $i^2=j^2=-1$ ו $ji=-ij$. המרכז הוא $Z(G)=\{1,-1\}$ והחבורה $G/Z(G)=\{\{1,-1\},\{i,-i\},\{j,-j\},\{ij,-ij\}\}$ היא אבלית [היא איזומורפית ל $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$] בעוד ש G לא אבלית.