תרגיל 11 טופולוגיה

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) כל מרכיב קשירות מסילתית הוא קבוצה סגורה (זכרו שראינו כל מרכיב קשירות הוא קבוצה סגורה).
פתרון: לא נכון. ניקח את

$$X = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x \in (0,1)\} \cup \{(0,0)\}$$

בתור תת מרחב של $\mathbb{R}^2$.זאת עקומת הסינוס של הטפולוגים. ראינו שקבוצה זו אינה קשירה מסילתית. ניקח את

$$A = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x \in (0,1)\}$$

זה מרכיב קשירות מסילתי שהוא לא גבוצה סגורה (כי $(0,0)$ נקודת הצטברות)

(ב) תהי A קבוצה סגוחה וקשירה במרחב X אזי A היא מרכיב קשירות.
פתרון: אכן, אם $A \subseteq B$ עבור B קשירה. אז A סגוחה גם בתת הטופולוגיה על B ולכן B לא קשירה אלא אם כן $A = B$. לכן A היא הקבוצה הקשירה הכי גדולה שמיכלה את עצמה כלומר היא מרכיב קישורת.

(ג) אם הגרף של $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הוא קבוצה קשירה ב $\mathbb{R}^2$ אז f רציפה.
פתרון: נגדיר פונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ לפי

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

כאמור ראינו שזו קבוצה קשירה ב $\mathbb{R}^2$ אבל f וודאי לא רציפה.

2. יהי X מרחב מטרי קשיר, האם ההשלמה שלו (למרחב מטרי שלם) היא גם מרחב קשיר?
פתרון: כן. ראינו כבר ש X צפוף בתוך ההשלמה שלו X^*. אם X קשיר אז גם $\operatorname{cl} X = X^*$ קשיר כנדרש.

3. תהי $A \subseteq \mathbb{R}^2$ קבוצה בת מניה, הוכיחו כי $\mathbb{R}^2 \backslash A$ היא קבוצה קשירה מסילתית.
פתרון: ניקח $a, b \in \mathbb{R}^2$ שונות ונמצא מסילה מ a ל b. שימו לב שדרך a עובר מספר לא בן מניה של קוים ישרים (יש מספר לא בן מניה של שיפועים אפשריים). רק מספר בן מניה מהם עלול לחתוך את A. אם נוריד את הישרים האלה, נישאר עם מספר לא בן מניה של ישרים שעוברים דרך A ונמצאים ב $\mathbb{R}^2 \backslash A$ נסמן קבוצה זו ב L_a. בדומה אפשר ליצר L_b שהיא לא בת מניה. ניקח איזשהוא ישר $l_1 \in L_a$ וישר $l_2 \in L_b$ שהם נחתכים (יש כאלה כי כל ישר חותך את l_1 למעט אלה שמקבילים לו, ויש רק מקביל אחד שעובר דרך b). נסמן את נקוד החיתוך x. כעת המסילה מ a ל x לאורך l_1 ומ x ל b לאורך l_2 היא מסילה מ a ל b וקיבלנו מה שרצינו.

4. האם הקבוצות הבאות קשירות ב $\mathbb{R}^2$?

(א) $A=\{(x,y)\mid x\in\mathbb{Q} \text{ or } y\in\mathbb{Q}\}$
פתרון: כן. נוכיח שקבוצה זו קשירה מסילתית. ניקח $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in A$ ונמצא מסילה שתחבר אותם. אם

$$x_1,y_2\in\mathbb{Q}$$

אז ניקח את המסילה הפוליגונאלית שהולכת מ (x_1,y_1)ל (x_1,y_2) ואז ל (x_2,y_2).
אם

$$x_1,x_2\in\mathbb{Q}$$

אז ניקח את המסילה הפוליגונאלית

$$(x_1,y_1)\to(x_1,0)\to(x_2,0)\to(x_2,y_2)$$

ובדומה אם

$$y_1,y_2\in\mathbb{Q}$$

או

$$x_2,y_1\in\mathbb{Q}$$

(ב) $B=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{Q}\}$
פתרון: לא. $B=\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ זאת מכפלה של שתי קבוצות totally disconnected ולכן totally disconnected בעצמה ובוודאי לא קישרה.

(ג) $C=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{Q} \text{ or } x,y\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\}$. (רמז: זכרו שמספיק למצוא תת קבוצה קשירה וצפופה כדי להוכיח שמרחב הוא קשיר)
פתרון: נוכיח שכל שתי נקודות בתוך $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ הן באותו מרכיב קשירות. זה ייתן לנו מרכיב קשירות צפוף ובכך יוכח שהמרחב הוא קשיר. אז ניקח

$$(x_1,y_1),(x_0,y_0)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$$

וניקח בתור מסילה את הקו הישר

$$y=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)+y_0$$

נשים לב שהשיפוע רציונאלי וכן y_0 ולכן לכל נקודה בקו הזה, x רציונאלי אם ורק אם y רציונאלי ולכן הקו עובר בתוך C. זה מוכיח ש $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ הוא חלק ממרכיב קשירות מסילתית ולכן חלק ממרכיב קשירות כנדרש.

5. יהי מרחב X עם $Y\subseteq X$ תת מרחב. ניקח $a\in Y$ ונסמן ב K_Y,K_X את מרכיב הקשירות של a ב X ו Y בהתאמה. הוכיחו כי $K_Y\subseteq K_X$.
פתרון: היות ש K_Y קשירה ומכילה את a היא בוודאי מוכלת בקבוצה הקדשירה הגדולה ביותר שמכילה את a הלוא היא K_X.

6. האם $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הקו מנייתית היא קומפקטית?
פתרון: ניקח את הכיסוי הפתוח הבא: נגדיר $U = \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$. ונגדיר

$$U_k = U \cup \{k\}$$

זאת בוודאי קבוצה פתוחה כי משלימתה בת מניה. הכיסוי הפתוח שלנו יהיה

$$\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$$

כמובן אין לו תת כיסוי סופי כי אם ניקח תת קבוצה סופית

$$U_{k_1}, \ldots, U_{k_m}$$

היא לא תכסה n כך ש $n \notin \{k_1, \ldots, k_m\}$. לכן הטופולוגיה לא קומפקטית.

7. יהי X מרחב ו $\mathcal{B}$ בסיס. הוכיחו כי X קומפקטי אם ורק אם לכל כיסוי $\{B_i\}$ של איברים $B_i \in \mathcal{B}$ יש תת כיסוי סופי.
פתרון: אם X קומפקטי אז לכל כיסוי פתוח יש תת כיסוי סופי, בפרט זה נכון לכיסוי $\mathcal{B}$. מצד שני אם התנאי לגבי $\mathcal{B}$ נכון. אז ניקח כיסוי פתוח כלשהוא $\{U_i\}_{i\in I}$. לכל $x \in X$ נבחר i_x כך ש

$$x \in U_{i_x}$$

לפי תכונה של בסיס, יש $B_x \in \mathcal{B}$ כך ש

$$x \in B_x \subseteq U_{i_x}$$

כמובן ש $\{B_x\}_{x\in X}$ הוא כיסוי של X ולכן יש תת כיסוי סופי

$$B_{x_1}, \ldots, B_{x_n}$$

ולכן ממילא

$$U_{i_{x_1}}, \ldots, U_{i_{x_n}}$$

הוא תת כיסוי סופי ל X וקיבלנו ש X קומפקטית.

8. תהי X קבוצה. ניקח קבוצה $A \subseteq X$ ונגדיר טופולוגיה על X שבה הקבוצות הפתוחות הן הקבוצה הריקה וכל הקבוצות שמכילות את A. (ודאו כי זו אכן טופולוגיה). האם X קומפקטית? (הפרידו למקרים לפי הצורך)
פתרון: מקרה א': $X\backslash A$ היא קבוצה אינסופית. אז לכל $x \in X\backslash A$ אפשר להגדיר

$$U_x = A \cup \{x\}$$

שזו קבוצה פתוחה. כמובן ש

$$\{U_x\}_{x\in X\backslash A}$$

הוא כיסוי פתוח ואין לו תת כיסוי סופי. X לא קומפקטית.

מקרה ב': $X\backslash A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ היא קבוצה סופית. אם $\{U_i\}_{i\in I}$ הוא כיסוי פתוח של X אז אפשר לקחת לכל x_k איזשהוא U_{i_k} כך ש $x_k \in U_{i_k}$. כמובן שלכל i_k מתקיים $A \subseteq U_{i_k}$ (כי הם קבוצות פתוחות) ולכן

$$U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}$$

הוא תת־כיסוי סופי של X ולכן X קומפקטית.