דף תרגילים 3

עקומות ב $\mathbb{R}^2$:

1. נתונה הפונקציה $y = x^3$:
   א. מצא פרמטרזציה רגולרית של הגרף של הפונקציה. ושרטט את העקומה במערכת הצירים.

$\gamma(t) = (t, t^3)$ היא פרמטריזציה של הגרף שכן $x = t$ ו- $y = t^3 = x^3$. היא רגולרית כי $\gamma'(t) = (1, 3t^2) \neq (0,0)$.

   ב. האם $\delta(u) = (u^2, u^6)$ פרמטרזציה רגולרית של הגרף?

היא לא רגולרית כי $\delta'(u) = (2u, 6u^5)$ ולכן $\delta'(0) = (0,0)$.

   ג. מצא נוסחאות לוקטור המשיק T והווקטור הנורמל N בכל נקודה על העקומה.

הווקטור המשיק הוא $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{9t^4+1}}(1, 3t^2)$. בשביל למצוא את הנורמל נסובב נגד כיוון השעון ב-90 מעלות ונקבל $N(t) = \frac{1}{\sqrt{9t^4+1}}(-3t^2, 1)$.

   ד. מצא את עקמומיות העקומה בעזרת הפרמטריזציה.

$\gamma''(t) = (0, 6t)$, $\det\begin{pmatrix} | & | \\ \gamma'(t) & \gamma''(t) \\ | & | \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3t^2 & 6t \end{pmatrix} = 6t$, ולכן

$$k(t) = \frac{\det\begin{pmatrix} | & | \\ \gamma'(t) & \gamma''(t) \\ | & | \end{pmatrix}}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{6t}{\sqrt{9t^4+1}^3}$$

   ה. מצא את עקמומיות העקומה בעזרת נוסחת Bateman. תזכורת לנוסחאת Bateman:

$$|k(x,y)| = \left| \frac{F''_{xx}{F'_y}^2 + F''_{yy}{F'_x}^2 - 2F''_{xy}F'_xF'_y}{\sqrt{\left({F'_x}^2 + {F'_y}^2\right)^3}} \right|$$

נסמן $F(x,y) = y - x^3$ ואז העקומה שלנו היא $F(x,y) = 0$. נחשב:
$F'_x = -3x^2, F'_y = 1, F''_{xx} = -6x, F''_{xy} = F''_{yy} = 0$ ולכן:

$$|k(x,y)| = \left| \frac{-6x \cdot 1^2 + 0 \cdot (-3x^2)^2 - 2 \cdot 0 \cdot (-3x^2) \cdot 1}{\sqrt{\left((-3x^2)^{2^2} + 1^2\right)^3}} \right|$$
$$= \left| \frac{-6x}{\sqrt{9x^4+1}^3} \right| = \frac{6|x|}{\sqrt{9x^4+1}^3}$$

ועבור $(x,y) = \gamma(t) = (t, t^3)$ אכן $|k(t)| = \frac{6|t|}{\sqrt{9t^4+1}^3} = |k(x,y)|$.

   ו. מהי העקמומיות המינימאלית (בערך מוחלט) של העקומה, ועל איזה נקודה היא מתקבלת?

לפי הנוסחא ב- $|k(0)| = 0$ ולכל $t \neq 0$: $|k(t)| > 0$ ולכן המינימום מתקבל ב- $\gamma(0) = (0,0)$.

2. תהי פונקציה $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{(2+x^2)^3}$. מצא פרמ' במהירות יחידה לעקומה זאת.

הפרמ' הראשונה שניקח היא $\gamma(t)=\left(t,\frac{1}{3}\sqrt{(2+t^2)^3}\right)$. הנגזרת שלה היא
$\gamma'(t)=\left(1,\frac{1}{3}\cdot\frac{3(2+t^2)^2\cdot 2t}{2\sqrt{(2+t^2)^3}}\right)=\left(1,t\sqrt{(2+t^2)}\right)$. ולכן . המהירות שלה היא
$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{1+t^2(2+t^2)}=\sqrt{t^4+2t^2+1}=t^2+1$.
מ- $t=0$ עד $t=x$ היא עוברת מרחק של $s(x)=\int_0^x\|\gamma'(t)\|dt=\int_0^x(t^2+1)dt=\frac{x^3}{3}+x$
אנחנו מחפשים פונקציה הפוכה $x(s)$, היא קיימת כי $s(x)=\frac{x^3}{3}+x$ מונוטונית עולה ולכן חח"ע.
אנחנו יודעים ש $s(0)=0$ ולכן הפונקציה ההפוכה תקיים $x(0)=x\big(s(0)\big)=0$. בנוסף אם
$s'(x)=x^2+1$ אז לפי משפט הנגזרת של פונקציה הפוכה $x'\big(s(x)\big)=\frac{1}{s'(x)}$...

3. הוכיחו שלעקומה $\gamma(t)$ (במישור או במרחב) יש מהירות קבועה אם ורק אם $\gamma''(t)$ מאונך ל- $\gamma'(t)$.

לעקומה יש מהירות קבועה אם ורק אם $\|\gamma'(t)\|$ קבוע. וזה נכון אם ורק אם
$\|\gamma'(t)\|^2=\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle$ קבוע, וזה נכון אם ורק אם $\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle'=0$. אבל
$\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle'=2\langle\gamma'(t),\gamma''(t)\rangle$ ולכן לעקומה יש מהירות קבועה אם ורק אם
$\langle\gamma'(t),\gamma''(t)\rangle=0$ וזה בדיוק אומר ש- $\gamma''(t)$ מאונך ל- $\gamma'(t)$.

4. חשב את עקמומיות העקומה γ המוגדרת ע"י המשוואה (היעזר בנוסחת Bateman)

א. $ax^2+by^2=1$

נסמן $F(x,y)=ax^2+by^2-1$ ואז העקומה שלנו היא $F(x,y)=0$. נחשב:
$F'_x=2ax, F'_y=2by, F''_{xx}=2a, F''_{xy}=0, F''_{yy}=2b$ ולכן:

$$|k(x,y)|=\left|\frac{2a\cdot(2by)^2+2b\cdot(2ax)^2-2\cdot 0\cdot(2ax)\cdot(2by)}{\sqrt{(4a^2x^2+4b^2y^2)^3}}\right|$$
$$=\left|\frac{8ab^2y^2+8ba^2x^2}{8\sqrt{(a^2x^2+b^2y^2)^3}}\right|=\left|\frac{ab^2y^2+ba^2x^2}{\sqrt{(a^2x^2+b^2y^2)^3}}\right|$$

סימן העקמומיות תלוי בכיוון שבו אנחנו מתקדמים על העקומה.

ב. $x^2+y^2+4y+1=2x$

נסמן $F(x,y)=x^2+y^2-2x+4y+1$ ואז העקומה שלנו היא $F(x,y)=0$. נחשב:
$F'_x=2x-2, F'_y=2y+4, F''_{xx}=2, F''_{xy}=0, F''_{yy}=2$ ולכן:

$$|k(x,y)|$$
$$=\left|\frac{2\cdot(2y+4)^2+2\cdot(2x-2)^2-2\cdot 0\cdot(2x-2)\cdot(2y+4)}{\sqrt{((2x-2)^2+(2y+4)^2)^3}}\right|$$
$$=\left|\frac{8x^2-16x+8+8y^2+32y+32}{\sqrt{(4x^2-8x+4y^2+16y+20)^3}}\right|$$
$$=\left|\frac{8(x^2-2x+y^2+4y+5)}{8\sqrt{(x^2-2x+y^2+4y+5)^3}}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+y^2+4y+5}}\right|$$

שוב, הסימן תולי בכיוון ההתקדמות.

5. חשב את העקמומיות של העקומות הבאות:

א. $\gamma(t)=(t,\cosh t)$

$\gamma(t)=(t,\cosh t)$, $\gamma'(t)=(1,\sinh t)$, $\gamma''(t)=(0,\cosh t)$ ו-
$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{1+\sinh^2 t}=\sqrt{\cosh^2 t}=\cosh t$ כי $\cosh t>0$ תמיד.

ולכן $\det\begin{pmatrix} | & | \\ \gamma'(t) & \gamma''(t) \\ | & | \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} = \cosh t$

$.k(t) = \frac{\det\begin{pmatrix} | & | \\ \gamma'(t) & \gamma''(t) \\ | & | \end{pmatrix}}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{\cosh t}{\cosh^3 t} = \frac{1}{\cosh^2 t} = \frac{4}{e^{2t}+2+e^{-2t}}$

ב. $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$

$,\gamma'(t) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)$ $,\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$

ו- $,\gamma''(t) = (6\cos t \sin^2 t - 3\cos^3 t, 6\sin t \cos^2 t - 3\sin^3 t)$

$$\|\gamma'(t)\| = 3\sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t} = 3\sqrt{(\cos^2 t + \sin^2 t)\cos^2 t \sin^2 t}$$
$$= 3\sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} = 3|\cos t \sin t|$$

$$\det\begin{pmatrix} | & | \\ \gamma'(t) & \gamma''(t) \\ | & | \end{pmatrix} = 9\det\begin{pmatrix} -\cos^2 t \sin t & 2\cos t \sin^2 t - \cos^3 t \\ \sin^2 t \cos t & 2\sin t \cos^2 t - \sin^3 t \end{pmatrix}$$
$$= 9(\cos^2 t \sin^4 t - 2\cos^4 t \sin^2 t - 2\cos^2 t \sin^4 t + \cos^4 t \sin^2 t)$$
$$= -9(\cos^2 t \sin^4 t + \cos^4 t \sin^2 t)$$
$$= -9(\cos^2 t + \sin^2 t)\cos^2 t \sin^2 t = -9\cos^2 t \sin^2 t$$

ולכן $.k(t) = \frac{-9\cos^2 t \sin^2 t}{27|\cos t \sin t|^3} = \frac{1}{3|\cos t \sin t|}$

6. חשב את העקמומיות הכוללת של העקומות:

א. $0 \le \phi \le 2\pi$ $,\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$

טעיתי בשאלה, על תענו.

ב. γ פרמ' במהירות יחידה של פתרון המשוואה $.5x^2 + 3xy + 5y^2 = 1$

לפי המשפט על עקמומיות כוללת, היא שווה מספר הפעמים שהעקומה $T(s)$ מסתובבת סביב 0 כפול 2π. כאשר עושים סיבוב לאורך האליפסה העקום המשיק גם כן מסתובב פעם אחת. ראה איור:

יוצא אם כן שבערך מוחלט האינטגרל $\left|\int_0^L k(s)ds\right| = 2\pi$. כמו קודם הסימן תלוי בכיוון ההתקדמות של העקומה. אותו פתרון יהיה נכון לכל משוואת אליפסה.

ג. γ פרמ' במהירות יחידה של פתרון המשוואה

$.(x^2 + 6x + y^2 - 4y + 12)(x^2 - 6x + y^2 + 4y + 12) = 0$

זו שאלה מאין מכשילה. הפתרון של המשוואה הוא האיחוד הזר של הפרונות של המשוואות $x^2 + 6x + y^2 - 4y + 12 = 0$ ו- $.x^2 - 6x + y^2 + 4y + 12 = 0$ לכל אחד מהם הוא אליפסה (למעשה מעגל, אבל מעגל זה מקרה פרטי של אליפסה) עם עקמומיות כוללת $.2\pi$ אז "העקמומיות הכוללת של האיחוד" היא סכום העקמומיות הכוללות של המעגלים. $.2\pi + 2\pi = 4\pi$

ד. γ פרמ' במהירות יחידה של פתרון המשוואה

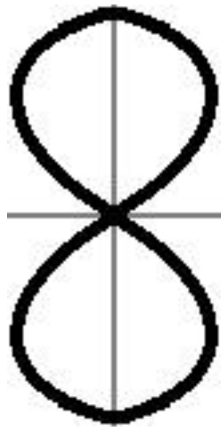
$.(x^2 + y^2 - 1)(2x^2 + 2y^2 - 1)\cdot \ldots \cdot(nx^2 + ny^2 - 1) = 0$

n מספר שלם חיובי.

פה יש n מעגלים זרים, ולכן העקמומיות הכוללת היא $.n \cdot 2\pi = 2\pi n$

7. חקור את העקומה $.0 \le t \le 2\pi$ $,\varphi(t) = \left(\cos t, \frac{1}{2}\sin 2t\right)$

א. צייר אותה.



ב. חשב T, N ועקמומיות.

כרגיל $\varphi'(t) = (-\sin t , \cos 2t)$, $\|\varphi'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 2t}$,

$T(t) = \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 2t}}(-\sin t , \cos 2t)$ ו-

$N(t) = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 2t}}(-\cos 2t , -\sin t)$

בקשר לעקמומיות $\varphi''(t) = (-\cos t , -2\sin 2t)$,

$$\det\begin{pmatrix} | & | \\ \gamma'(t) & \gamma''(t) \\ | & | \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos 2t & -2\sin 2t \end{pmatrix} = (\cos t - \cos 3t) + \frac{\cos t + \cos 3t}{2}$$

$$= \frac{3}{2}\cos t - \frac{1}{2}\cos 3t$$

ולכן $k(t) = \frac{3\cos t - \cos 3t}{2\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 2t}^3}$.

ג. מה עם מהירות יחידה?

$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 2t}$ לא סימפתי, לא כדאי לנסות לשים אותו באינטגרל.

ד. מצא את $\int_0^{2\pi} k(t)dt$, האם יש סיבה תיאורטית לתוצאה הזאת.

מפחיד, הא? אתם לא אמורים ממש לחשב את זה כאינטגרל, במקום זה נשתמש בטריק.

א) כל הפונקציות הטריגונומטריות הן 2π מחזוריות. ולכן $k(t) = k(t-2\pi)$ ולכן

$$\int_0^{2\pi} k(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} k(t)dt + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} k(t)dt + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} k(t)dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} k(t)dt + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} k(t)dt + \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{0} k(t)dt$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} k(t)dt + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} k(t)dt = \int_0^{\pi} k\left(t - \frac{\pi}{2}\right)dt + \int_0^{\pi} k\left(t + \frac{\pi}{2}\right)dt =$$

$$= \int_0^{\pi} k\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + k\left(t + \frac{\pi}{2}\right)dt$$

ב) נחשב:

$$k\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(3t-\frac{3\pi}{2}\right)}{2\sqrt{\sin^2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+\cos^2(2t-\pi)}^3}=\frac{3\sin t+\sin 3t}{2\sqrt{(-\cos t)^2+(-\cos 2t)^2}^3}$$
$$=\frac{3\sin t+\sin 3t}{2\sqrt{\cos^2 t+\cos^2 2t}^3}$$
$$k\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(3t+\frac{3\pi}{2}\right)}{2\sqrt{\sin^2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)+\cos^2(2t+\pi)}^3}=\frac{-3\sin t-\sin 3t}{2\sqrt{\cos^2 t+(-\cos 2t)^2}^3}$$
$$=-\frac{3\sin t+\sin 3t}{2\sqrt{\cos^2 t+\cos^2 2t}^3}=-k\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$$

ולכן $k\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+k\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=0$ ו- $\int_0^{2\pi}k(t)dt=\int_0^{\pi}k\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+k\left(t+\frac{\pi}{2}\right)dt=0$
בקשר לסיבה תיאורית – אין. אם חשבתם שזה בגלל המשפט על עקמומיות כוללת, זה לא. המשפט הזה פועל רק כאשר העקומה במהירות יחידה.

עקומות ב $\mathbb{R}^3$:

8. נתונה עקומה $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י הפרמטרזציה $\gamma(t)=(\cos t,t,\sin t-3)$

א. חשב את מהירות העקומה.

$\gamma'(t)=(-\sin t,1,\cos t)$, $\|\gamma'(t)\|=\sqrt{\sin^2 t+1+\cos^2 t}=\sqrt{2}$

ב. חשב את אורך העקומה.

$$\int_0^{2\pi}\|\gamma'(t)\|dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}dt=2\sqrt{2}\pi$$

ג. נתונה פונקציה $t:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to[0,2\pi]$, $t(s)=4s$. איך שינוי הפרמטריזציה $\tilde{\gamma}(s)=\gamma\big(t(s)\big)$ ישפיע על אורך העקומה?

זה לא, שינוי פרמ' לא יכול להשפיע על אורך העקומה. ואכן

$$\int_0^{2\pi}\|\gamma'(t)\|dt=\int_0^{2\pi}\left\|\gamma'\big(t(s)\big)\right\|t'(s)ds=\int_0^{2\pi}\left\|t'(s)\gamma'\big(t(s)\big)\right\|ds$$
$$=\int_0^{2\pi}\|\tilde{\gamma}'(s)\|ds$$

השיוויון השני נובע מכך ש- $t'(s)$ סקאלר חיובי. השלישי הוא סתם כלל השרשרת, וקיבלנו שהאורך של העקומה לפי שתי הפרמטריזציות שווה. זה תמיד נכון.

ד. מצא פרמטרזציה במהירות יחידה לעקומה $\gamma(t)$.

אם $\|\gamma'(t)\|=\sqrt{2}$ אז בין זמן 0 ל- x העקומה תעבור מרחק $s(x)=\int_0^x\sqrt{2}dt=\sqrt{2}x$, ולכן היא תעבור מרחק s בזמן $x(s)=\frac{s}{\sqrt{2}}$. הפרמ' המבוקשת היא $\tilde{\gamma}(s)=\gamma\big(x(s)\big)=\gamma\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$.

9. הראה שהעקומות הבאות נתונות בפרמטרזצית יחידה וחשב את העקמומיות והפיתול שלהן

א. $\gamma(t)=\left(\frac{1}{3}\sqrt{(1+t)^3},\frac{1}{3}\sqrt{(1-t)^3},\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$

$\gamma'(t)=\left(\frac{1}{2}\sqrt{(1+t)},-\frac{1}{2}\sqrt{(1-t)},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\|\gamma'(t)\|=\sqrt{\frac{1+t}{4}+\frac{1-t}{4}+\frac{1}{2}}=1$.

ב. $\gamma(t)=\left(\frac{4}{5}\cos t,1-\sin t,-\frac{3}{5}\cos t\right)$

10. חקור את העקומות הבאות – בדוק אם יש להן פר"מ מהירות יחידה שניתן למצוא בזמן סביר, מצא T, N, B, עקמומיות ופיתול, ונסה לצייר אותן.

א. $\gamma(t) = (at\cos t, at\sin t, \ln t)$

ב. $\gamma(t) = \big((3+\cos t)\cos 3t, (3+\cos t)\sin 3t, \sin t\big)$.

ג. העקומה המוגדרת ע"י המשוואות: $x^2+y^2+z^2=1$ ו-$y=x^2$.

11. הוכח שכל מסילה $\gamma(s)$ במהירות יחידה עם עקמומיות $k>0$ ופיתול τ קבועים היא מהצורה $\gamma(s) = P + \cos\frac{s}{a}A + \sin\frac{s}{a}B + sC$ עבור איזשהם וקטורים אורתוגונליים A, B, C עם $\|A\| = \|B\|$ ואיזשהו $P \in \mathbb{R}^3$. רמזים:

א. השתמש במשוואות פרנה בשביל להוכיח ש- $\tau T_\gamma + kB_\gamma$ וקטור קבוע, הוא יהיה C.

ב. אז הגדירו עקומה חדשה $\delta(s) = \gamma(s) - sC$, זכרו שבניגוד ל- $\gamma(s)$, $\delta(s)$ לא חייבת להיות במהירות יחידה. הראו ש- $\delta''(s)$ מאונך ל- $\delta'(s)$, והסיקו של- $\delta(s)$ יש מהירות קבועה (שאלה 3).

ג. הוכיחו שיש ל- עקמומיות קבועה, ושהפיתול שלה הוא 0.

ד. הסיקו מהתרגול שהיא בתוך מישור, ושהיא מעגל הנע במהירות קבועה – מה שיאמר שהיא מהצורה $P + \cos\frac{s}{a}A + \sin\frac{s}{a}B$ כאשר P מרכז המעגל ו- A, B וקטורים אורתוגונליים באותו אורך שפורשים את המישור עליו $\delta(s)$ נמצאת.