תרגיל 3

להגשה עד 4.12.16

שאלה 1

1. הראו שכל קבוצה פתוחה ב$\mathbb{R}$ היא איחוד בן מניה של קבוצות סגורות (תכונה זו נקראת F_σ).
2. הראו שכל קבוצה סגורה ב$\mathbb{R}$ היא חיתוך בן מניה של קבוצות פתוחות (תכונה זו נקראת G_δ).

שאלה 2

יהיו $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$ שתי משפחות של קבוצות ב־X. הראו כי אם $\mathbb{A}_1 \subseteq \mathbb{A}_2 \subseteq \sigma(\mathbb{A}_1)$ אזי נובע כי $\sigma(\mathbb{A}_1) = \sigma(\mathbb{A}_2)$.

שאלה 3

יהיו X קבוצה, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{P}(X)$. הראו כי לכל $A \in \sigma(\mathbb{A})$ קיימת משפחה בת מנייה $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$ כך ש: $A \in \sigma(\mathbb{B})$.

הדרכה:

1. הראו כי קבוצת הקבוצות ב־ $\sigma(\mathbb{A})$ המקיימת תכונה זו הינה σ אלגברה.
2. הראו כי הקבוצות ב־$\mathbb{A}$ מקיימות תכונה זו והסיקו את הנדרש.

שאלה 4

נניח ש $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ הינן מידות על מרחב מדיד $(X, \mathbb{A})$ ולכל $A \in \mathbb{A}$: $\mu_n(A) \nearrow$. נגדיר:

$$\mu(A) := \lim_{n\to\infty} \mu_n(A).$$

האם μ הינה מידה? אם לא תנו דוגמא נגדית.

שאלה 5

יהי $(\mathbb{X}, \mathbb{A})$ מרחב מדיד.

1. תהי $a \in \mathbb{X}$. נגדיר: $\delta_a \colon \mathbb{A} \to [0, \infty]$ על ידי:

$$\delta_a(E) := \begin{cases} 1 & a \in E \\ 0 & a \notin E \end{cases}$$

   הוכיחו כי δ_a היא מידה חיובית מעל $\mathbb{A}$.

2. תהי $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת מידות חיוביות מעל $\mathbb{A}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת מספרים ב $[0, \infty]$. לכל $E \in \mathbb{A}$ נגדיר:

$$\mu(E) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu_n(E)$$

   הוכיחו כי μ מידה חיובית מעל $\mathbb{A}$.

שאלה 6

יהי $(X,\mathbb{A},\mu)$ מרחב מידה חיובית, ותהי Y קבוצה לא ריקה. נתונה פונקציה $f : X \to Y$.

1. נגדיר: $\mathbb{B}_f := \left\{F \subseteq Y \ : \ f^{-1}(F) \in \mathbb{A}\right\}$. הוכיחו כי $(Y,\mathbb{B}_f)$ הינו מרחב מדיד.
2. לכל קבוצה $E \subseteq Y$ ששייכת ל $\mathbb{B}_f$, נגדיר: $\nu(E) := \mu(f^{-1}(E))$.
   הוכיחו כי $(Y,\mathbb{B}_f,\nu)$ הינו מרחב מידה חיובית.

הערה: $(Y,\mathbb{B}_f,\nu)$ נקרא מרחב המידה המושרה מ $(X,\mathbb{A},\mu)$ על ידי f.

בהנאה!