'עי המחשב (89112)

(מועד א)

שאלון סגור

<u>מרצים:</u> פרופ' ר. עדין, פרופ' א. רזניקוב.

<u>משך הבחינה:</u> 3 שעות (**לאחר הארכה**).

<u>הנחיות:</u> יש לפתור את <u>כל</u> 3 השאלות. (הציון המקסימאלי הוא 100)

אין להשתמש בחומר עזר, גם לא במחשבון.

<u>נא כתבו פתרונות רק בטופס המצורף</u>. <u>המחברת לא תיבדק</u> והיא רק לטיוטה.

בהצלחה!

1. יהי $U=\mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-2, עם מקדמים ממשיים. נגדיר תת-מרחבים $V,W\subseteq U$ ע"י

$$V=\left\{p(x)\in U \mid p(1)=p(-1)=0\right\},\qquad W=span\left\{1+x-x^2,1+\varepsilon x-x^2\right\}$$

כאשר ε הוא פרמטר ממשי. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות; <u>נמקו את תשובותיכם</u>:

א. (10 נק') קיימים אינסוף ערכים של $\varepsilon\in\mathbb{R}$ כך ש- $\dim V=\dim W$.

ב. (10 נק') קיימים אינסוף ערכים של $\varepsilon\in\mathbb{R}$ כך ש- $V\cap W=\{0\}$.

ג. (10 נק') קיימים אינסוף ערכים של $\varepsilon\in\mathbb{R}$ כך ש- $\dim(V\cap W)=1$.

ד. (10 נק') קיים ערך של $\varepsilon\in\mathbb{R}$ כך ש- $U=V\oplus W$.

2. יהי $U=\left\{A\in M_{2\times2}(\mathbb{Z}_3) \mid trA=0\right\}$, כאשר $tr\begin{pmatrix} x & w\\ z & y\end{pmatrix}=x+y$. ($M_{2\times2}(\mathbb{Z}_3)$ שקול לסימון $\mathbb{Z}_3^{2\times2}$)

א. (20 נק') הוכיחו שהקבוצה $S=\left\{\begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{1}\end{pmatrix}\right\}$ מהווה בסיס של U.

ב. (10 נק') תהי $C=\begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{1} & \bar{1}\end{pmatrix}\in U$. מצאו את וקטור הקואורדינטות $[C]_S$ של C לפי הבסיס הסדור S (בסדר הנתון, משמאל לימין).

ג. (5 נק') מצאו $D\in U$ כך ש- $[D]_S=\begin{pmatrix}\bar{1}\\ \bar{2}\\ \bar{1}\end{pmatrix}$.

3. תהיינה $B\in M_{n\times m}(\mathbb{F}), A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ מטריצות מלבניות.

א. (10 נק') נניח שמתקיים $A\cdot B=0$. הוכיחו שקיים $0\neq x\in\mathbb{F}^{n\times1}$ כך ש- $(B\cdot A)x=0$.

ב. (10 נק') נניח שמתקיים $A\cdot B=0$. האם בהכרח מתקיים $B\cdot A=0$? <u>נמקו את תשובתכם.</u>

ג. (10 נק') נניח שמתקיים $A\cdot B=I_m$ (מטריצת היחידה מסדר $m\times m$) וגם $B\cdot A=I_n$ (מטריצת היחידה מסדר $n\times n$). הוכיחו: $m=n$.

<u>נמקו את כל התשובות.</u>

<u>נא כתבו פתרונות רק בטופס המצורף. המחברת לא תיבדק.</u>