תרגיל 1

1. הוכיחו כי בכל מרחב מטרי (X,d) מתקיים:
א. $d(x_1,x_n) \leq d(x_1,x_2)+...+d(x_{n-1},x_n)$ לכל $n \geq 2$.
ב. $|d(x,z)-d(y,z)| \leq d(x,y)$.
ג. $\forall A \subseteq X, |d(x,A)-d(y,A)| \leq d(x,y)$.
פתרון:

א. נוכיח באינדוקציה. עבור $n=2$, ידוע, מהגדרת מטריקה.

נניח נכונות עבור $n=k$, ונוכיח עבור $n=k+1$. ובכן, $d(x_1,x_{k+1}) \leq d(x_1,x_k) + d(x_k,x_{k+1}) \leq d(x_1,x_2)+...+d(x_{k-1},x_k)+d(x_k,x_{k+1})$ (מהנחת האינדוקציה).

ב. שקול להוכיח: $-d(x,y) \leq d(x,z)-d(y,z) \leq d(x,y)$.

צד ימין נובע מכך ש: $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$.

צד שמאל נובע מכך ש: $d(y,z) \leq d(y,x)+d(x,z)$.

ג. הוכחה זהה לסעיף ב'. משתמשים באי שוויון המשולש עבור המקרה של קבוצה ושתי נקודות.

2. נסמן בX את אוסף כל הסדרות שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{1,2...,n\}$, ונגדיר את הפו' הבאה $d: X \times X \to [0,\infty)$ ע"י:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x=y \\ \dfrac{1}{\min\{i : x_i \neq y_i\}} & x \neq y \end{cases}.$$

הוכיחו כי d היא אולטרה מטריקה על X.
פתרון:

$(x,y)=0 \iff d(x,y)=0$ נובע ישירות מההגדרה.

סימטריות: טירוויאלי.

אי"ש המשולש: יהיו x,y,z 3 סדרות בX. אם שתיים מהן שוות אז האי שוויון טריוויאלי. אז נניח ש $x \neq y, x \neq z, y \neq z$. נסמן $j=\min\{i : x_i \neq y_i\}, k=\min\{i : y_i \neq z_i\}$. אז $\min\{i : x_i \neq z_i\} \geq \min\{j,k\}$. הסבר: אם $t<j,k$ אז $x_t=y_t \wedge y_t=z_t \Longrightarrow x_t=z_t$. לכן: $d(x,z) = \dfrac{1}{\min\{i : x_i \neq z_i\}} \leq \dfrac{1}{\min\{j,k\}} = \max\{\dfrac{1}{j},\dfrac{1}{k}\} = \max\{d(x,y),d(y,z)\}$.

3. הוכיחו או הפריכו: הפונקציות הבאות הן מטריקות:
א. $d_{\min}((x,y),(x',y')) = \min\{d(x,x'),d(y,y')\}$ על $\mathbb{R}^2$(כאשר d היא המטריקה האוקלידית על $\mathbb{R}$).

ב. $d((x,y),(x',y')) = |x|+|y|+|x'|+|y'|$ על $\mathbb{R}^2$.

ג. $d_{\sum}((x,y),(x',y')) = d(x,x') + d(y,y')$ על $X\times X$ כאשר (X,d) הוא מרחב מטרי.

פתרון:

א. הפרכה: $(0,1) \neq (0,0)$ אבל $d((0,0),(0,1)) = \min\{0,1\} = 0$.

ב. הפרכה: $(0,1) = (0,1)$ אבל $d((0,1),(0,1)) = 2$.

ג. הוכחה: ראשית, יש להראות שהפו' הולכת לתוך $[0,\infty)$. זה נובע מכך ש $d(x,x'), d(y,y') \geq 0$, וסכום של מספרים אי שליליים הוא אי שלילי.

$d_{\sum}((x,y),(x',y')) = 0 \iff d(x,x') + d(y,y') = 0$. בגלל ש$d$ מטריקה, $d(x,x'), d(y,y') \geq 0$. לכן זה שקול לכך ש $d(x,x') = 0 \wedge d(y,y') = 0$ וזה קורה אמ"ם $x = x' \wedge y = y'$. כלומר $(x,y) = (x',y')$.

סימטריות: $d_{\sum}((x,y),(x',y')) = d(x,x') + d(y,y') = d(x',x) + d(y',y) = d_{\sum}((x',y'),(x,y))$.

אי"ש המשולש: $d_{\sum}((x,y),(x',y')) = d(x,x') + d(y,y') \leq d(x,x'') + d(x'',x') + d(y,y'') + d(y'',y') = d_{\sum}((x,y),(x'',y'')) + d_{\sum}((x'',x'),(y'',y'))$.

4. תזכורת: הגדרנו בכיתה את המטריקה הp - אדית באופן הבא: עבור $p \in \mathbb{N}$ ראשוני, מגדירים $k(x,y) = \max\{i : p^i | (x-y)\}$ ו $d_p(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \dfrac{1}{p^{k(x,y)}} & x \neq y \end{cases}$.

תארו את הכדור $B_{d_7}(3, \dfrac{1}{49})$ במרחב $(\mathbb{Z}, d_7)$.

פתרון:

$z \in B(3,\frac{1}{49}) \iff d(3,z) \leq \frac{1}{49} \iff z = 3 \vee k(3,z) \geq 2 \iff z = 3 \vee z = 3 + 49x$. כלומר, $B(3,\frac{1}{49}) = 3 + 49\mathbb{Z}$.

5. יהי (X,d) מרחב מטרי, $x_1, x_2 \in X$ ו $r_1, r_2 > 0$, ונניח ש $p \in B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2)$. נסמן

$$r = \min\{r_1 - d(x_1,p), r_2 - d(x_2,p)\}$$

הוכיחו ש .

$$B(p,r) \subseteq B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2)$$

.

פתרון:

יהי $y \in B(p,r)$. כלומר, $d(y,p) \leq r$. מאי שוויון המשולש, $d(y,x_1) \leq d(y,p) + d(p,x_1) \leq r_1 - d(x_1,p) + d(x_1,p) = r_1$. לכן $y \in B(p,r)$. כנ"ל לגבי $B(x_2,r_2)$.

6. נגדיר את הרדיוס של תת קבוצה $A \subseteq X$ להיות

$$rad\, A := \inf_{a\in A} \sup_{b\in A} d(a,b)$$

הוכח או הפרך

(א) $rad\,A = \frac{1}{2}\,diam\,A$

(ב) $rad\,A \leq \frac{1}{2}\,diam\,A$

(ג) $rad\,A \geq \frac{1}{2}\,diam\,A$

(ד) $rad\,A = diam\,A$

כיצד תשובתכן תשתנה במקרה ש-X אולטרה-מטרי

<u>פתרון</u>:

i. הפרכה: מרחב דיסקרטי עם 2 נקודות

ii. הפרכה: מרחב דיסקרטי עם 2 נקודות

iii. הוכחה: בשלילה, נניח ש:

$$rad\,A < \frac{1}{2}\,diam\,A$$

אם ה-inf קטן ממש ממשהו, אז חייבת להיות דוגמה כזו. כלומר, צריך להיות $a \in A$ כך ש

$$\sup_{b \in A} d(a,b) < \frac{1}{2}\,diam\,A = \frac{1}{2} \sup_{x,y \in A} d(x,y)$$

אבל לפי אי שיוויון המשולש אנחנו יודעים ש:

$$\sup_{x,y \in A} d(x,y) \leq \sup_{x,y \in A} d(x,a) + d(a,y) \leq \sup_{x \in A} d(x,a) + \sup_{y \in A} d(a,y) \leq 2 \sup_{b \in A} d(a,b)$$

וזו כמובן סתירה.

iv. הפרכה: מעגל במטריקה האוקלידית

במקרה של אולטרה-נורמה 3 הסעיפים הראשונים נשארים אותו דבר עם אותם הטיעונים.
עם זאת, הסעיף האחרון כן נכון.
ברור ש-$rad\,A \leq diam\,A$. נראה את ההפך, כלומר ש-

$$\inf_{a \in A} \sup_{b \in A} d(a,b) \geq diam\,A$$

כדי להראות ש-inf גדול ממשהו, צריך להראות את זה לכל איבר בקבוצה. אז יהיה $a \in A$, צריך להראות ש-

$$\sup_{b \in A} d(a,b) \geq diam\,A = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$$

כדי להראות את זה עבור ה-sup צריך להראות את זה לכל בחירה מתאימה. אז יהיו $x,y \in A$, מתקיים

$$d(x,y) \leq \max(d(x,a), d(a,y)) \leq \sup_{b \in A} d(a,b)$$

מש"ל

7. שאלת אתגר: מצאו $X \subseteq \mathbb{R}^n$ תת קבוצה חסומה ושיכון איזומטרי $f : X \to X$ שאינו איזומטריה (כלומר הוא לא על).

פתרון:

בחרו מספר לא רציונלי $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ והגדירו $X := \{e^{i\pi n\alpha} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. הסתכלו על השיכון האיזומטרי $f : X \to X$ שמוגדר על ידי $z \mapsto e^{i\pi\alpha} \cdot z$. קל לראות שזה אכן שיכון איזומטרי. כדי לראות שהוא לא על, שימו לב $e^{i\pi\alpha} \notin im\, f$ כי אחרת:

$$e^{i\pi n\alpha} = e^{i\pi\alpha} \Rightarrow i\pi\alpha(n-1) \in i\pi\mathbb{Z} \Rightarrow \alpha(n-1) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Q}$$

שסותר את הבניה שלנו.

8. שאלת אתגר: הראו שאם $(X, ||\cdot||)$ מרחב נורמי, וd המטריקה המושרית מהנורמה, אז לא קיימים כדורים שונים $B(a_1, r_1), B(a_2 r_2)$ כך ש $r_1 < r_2$ וגם $B(a_2, r_2) \subseteq B(a_1, r_1)$.

פתרון:

נניח $a_1 \neq a_2$ $r_1 < r_2$, ונניח בשלילה שמתקיים $B(a_2, r_2) \subset B(a_1, r_1)$. אזי $a_2 \in B(a_2, r_2) \subset B(a_1, r_1)$ ולכן $||a_2 - a_1|| < r_1$. יהי $v = a_1 + r_1 \dfrac{a_2 - a_1}{||a_2 - a_1||}$. מתקיים:

$$||v - a_2|| = ||a_1 + r_1 \frac{a_2 - a_1}{||a_2 - a_1||} - a_2|| = ||(a_2 - a_1)(\frac{r_1}{||a_2 - a_1||} - 1)|| = ||a_2 - a_1|| \cdot |\frac{r_1 - ||a_2 - a_1||}{||a_2 - a_1||}| = |r_1 - ||a_2 - a_1||| = r_1 - ||a_1 - a_2|| < r_1 < r_2.$$

לכן $v \in B(a_2, r_2)$. אבל $||v - a_1|| = ||r_1 \dfrac{a_2 - a_1}{||a_2 - a_1||}|| = r_1$, ולכן $v \notin B(a_1, r_1)$. סתירה.