

## תרגיל 7 אנליזה הרמונית תשע"ט

10 בדצמבר 2018

להגשה בשבוע שמתחיל ב23.12, ט"ו טבת.

1. לכל  $0 < a < \pi$ , נגדיר את הפונקציה:

$$f_a(x) = \begin{cases} \frac{x+\pi}{a-\pi} & -\pi \leq x \leq -a \\ \frac{x}{a} & -a < x < a \\ \frac{x-\pi}{a-\pi} & a \leq x \leq \pi \end{cases}$$

בקטע  $[-\pi, \pi]$ .

(א) מצאו את טור פורייה של  $f_a$ .

(ב) חשבו את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^4}$ ; השתמשו בפרסבל.

(ג) נסמן:  $g(x) = \lim_{a \rightarrow 0} f_a(x)$ . מצאו את  $g(x)$  ואת טור פורייה שלה.

(ד) האם הטור של  $f$  מתכנס במ"ש? האם הטור של  $g$  מתכנס במ"ש?

2. תהי  $f$  פונקציה רציפה למקוטעין בקטע  $[-\pi, \pi]$ . יהיו  $a_0, a_n, b_n$  מקדמי פורייה של  $f$ .

(א) באמצעות מקדמי פורייה של  $f$ , בטאו את מקדמי פורייה של  $f(x) \cos x$ .

(ב) נניח שהפונקציה  $f$  זוגית; באמצעות פרסבל, הוכיחו שמתקיים:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) \cos x)^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} a_{n+1} + \frac{1}{2} a_1^2$$

היזו את האנידקסים במידת הצורך.

(ג) תנו דוגמה לפונקציה  $f$  זוגית, עבורה:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) \cos x)^2 dx > \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

3. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{2}{2 - \cos x + i \sin x}$  בקטע  $[-\pi, \pi]$ . הציגו את  $f$  כטור פורייה, ובאמצעות פרסבל חשבו את:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$