תרגיל 3

1. נתונות הקבוצות הבאות:

$$\begin{array}{lllllllll} X_3 & = & \{a,\{\{a\}\}\} & X_2 & = & \{a,\{a\}\} & X_1 & = & \{\{a\}\} \\ X_6 & = & \{a,\{a\},\{\{a\}\},\{a,\{a\}\}\} & X_5 & = & \{a,\{a\},\{\{a\}\}\} & X_4 & = & \{\{a\},\{\{a\}\}\} \end{array}$$

אילון מהטענות נכונות:

א. $X_1 \in X_2$
ב. $X_1 \subseteq X_2$
ג. $X_2 \in X_6$
ד. $X_2 \subseteq X_3$
ה. $X_3 \subseteq X_4$
ו. $X_4 \subseteq X_5$
ז. $X_5 \in X_6$
ח. $X_5 \subseteq X_6$

פיתרון

ב. נכון ג. נכון ו. נכון ח. נכון

2. מצאו קבוצות A, B, C המקיימות את התנאים הבאים:

א. $A \cup B \subseteq A \cup C$ אבל $B \nsubseteq C$.
ב. $A \cap B \subseteq A \cap C$ אבל $B \nsubseteq C$.
ג. $A \in B, B \in C, A \notin C$.
ד. $A \in B, B \in C, A \in C$
ה. $A \in B, A \subseteq B$

פיתרון

א. $A = \{1,2\}, B = \{2,3\}, C = \{3\}$
ב. $A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{3\}$
ג. $A = \{1\}, B = \{\{1\}\}, C = \{\{\{1\}\}\}$
ד. $A = \{1\}, B = \{\{1\}\}, C = \{\{\{1\}\}, \{1\}\}$
ה. $A = \{1\}, B = \{\{1\}, 1\}$

3. הוכיחו:

$$\{2n+5 | n \in \mathbb{Z}\} = \{2n+9 | n \in \mathbb{Z}\}$$

פיתרון

נשתמש בהכלה דו־כיוונית.

לכיוון אחד, יהי $x \in \{2n+5 | n \in \mathbb{Z}\}$ כלומר קיים $n \in \mathbb{Z}$ עבורו: $x = 2n+5$.

לכן: $x = 2(n-2)+9$. מכיוון ש־$n \in \mathbb{Z}$ אז גם $n-2 \in \mathbb{Z}$ ולכן לפי הגדרת $\{2n+9 | n \in \mathbb{Z}\}$ נקבל שאכן $x \in \{2n+9 | n \in \mathbb{Z}\}$, כלומר:

$$\{2n+9 | n \in \mathbb{Z}\} \supseteq \{2n+5 | n \in \mathbb{Z}\}$$

לכיוון השני, יהי $x \in \{2n+9 | n \in \mathbb{Z}\}$ כלומר קיים $n \in \mathbb{Z}$ עבורו $x = 2n+9$.

לכן: $x = 2(n+2)+5$. מכיוון ש־$n \in \mathbb{Z}$ אז גם $n+2 \in \mathbb{Z}$ ולכן לפי הגדרת $\{2n+5 | n \in \mathbb{Z}\}$ נקבל שאכן $x \in \{2n+5 | n \in \mathbb{Z}\}$, כלומר:

$$\{2n+9 | n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \{2n+5 | n \in \mathbb{Z}\}$$

ולכן סה"כ לפי הכלה דו־כיוונית נקבל:

$$\{2n+5 | n \in \mathbb{Z}\} = \{2n+9 | n \in \mathbb{Z}\}$$

4. הוכיחו או הפריכו:

א. לכל שתי קבוצות X, Y אם $X \subseteq Y$ אז $X \cup (Y \setminus X) = Y$.

ב. $(A \triangle B) \triangle (A \cap B) = A \cup B$.

ג. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$.

פיתרון

א. הוכחה: נראה הכלה דו כיוונית:

$\supseteq$: יהי $y \in Y$, אזי אם $y \in X$ אז $y \in X \cup (Y \setminus X)$, אחרת $y \in Y \setminus X$ ולכן $y \in X \cup (Y \setminus X)$.

$\subseteq$: יהי $y \in X \cup (Y \setminus X)$ אזי מתקיים: $y \in X \vee y \in Y \setminus X$. אם $y \in X$ אז מהעובדה ש־$X \subseteq Y$ נובע $y \in Y$. אם $y \in Y \setminus X$ גם נובע ישירות ש־$y \in Y$. ובסה"כ בכל מקרה $y \in Y$.

ב. הוכחה. טענת עזר: אם $X \cap Y = \phi$ אז $X \triangle Y = X \cup Y$.

הוכחת טענת העזר: $X \triangle Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) = (X \cup Y) \setminus \phi = X \cup Y$.

כעת אצלנו נשים לב ש־ $(A \triangle B) \cap (A \cap B) = \phi$ ולכן $(A \triangle B) \triangle (A \cap B) = (A \triangle B) \cup (A \cap B) = [(A \cup B) \setminus (A \cap B)] \cup (A \cap B) = A \cup B$.

הסבר המעברים: השיוויון הראשון זה בדיוק טענת העזר. השיוויון השני זו שקילות של ההפרש הסימטרי. והשיוויון השלישי נובע מכך ש־ $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$ ובעזרת סעיף א.

ג. הפרכה: $A = \{1,2\}, B = \{1,3\}, C = \{1,4\}$, אזי $(A \setminus B) \setminus C = \{2\} \setminus \{1,4\} = \{2\}$, אבל $A \setminus (B \setminus C) = \{1,2\} \setminus \{3\} = \{1,2\} \neq \{2\}$.

5. לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר:

$$A_n = \begin{cases} [0, \frac{n}{2}] & n \text{ is even number} \\ [-\frac{n-1}{2}, 0] & n \text{ is odd number} \end{cases}$$

כאשר $[a,b]$ הוא הקטע הסגור בממשיים.

א. מצא את $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. הוכח תשובתך.

ב. מצא את $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. הוכח תשובתך.

פיתרון

א. נקבל $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n = \mathbb{R}$. נוכיח ע"י הכלה דו־כיוונית:

$\supseteq$: יהי $x \in \mathbb{R}$, אם $x \geq 0$ אזי $x \in [0, \lfloor x \rfloor + 1]$ ולכן $x \in A_{2(\lfloor x \rfloor + 1)}$, ולכן הוא נמצא באיחוד הכללי, המוגדר כאוסף האיברים שנמצאים לפחות באחת הקבוצות, והנה מצאנו אחת כזו. באותו אופן אם $x < 0$ אז $x \in [\lfloor x \rfloor, 0]$ ולכן $x \in A_{2\cdot\lfloor x \rfloor + 1}$.

$\subseteq$:ברור כי כל האיברים כאן הם מהממשיים.

ב. נקבל $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} A_n = \{0\}$. נוכיח: ההכלה $\supseteq$ ברורה, כי 0 נמצא בכל אחת מהקבוצות, ולכן בחיתוך של כולם לפי הגדרה. נניח בשלילה שקיים $0 \neq x \in \mathbb{R}$ כך ש $x \in \underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} A_n$, אזי לפי הגדרה לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $x \in A_n$. לכן בפרט $x \in A_3 = [-1, 0]$ אבל $x \neq 0$ ולכן נובע ש־$x < 0$. בנוסף נובע בפרט ש־ $x \in A_2 = [0, 1]$, אבל $x \neq 0$ ולכן נובע ש־$x > 0$ בסתירה לכך שראינו ש־$x < 0$.

שאלות אינדוקציה

18 בדצמבר 2016

1. תהיינה $A_1, A_2, ..., A_n$ קבוצות. הוכיחו: $A_1 \triangle A_2 \triangle ... \triangle A_n = \{x | x \text{ in odd number of sets } A_i\}$.
כלומר, קבוצת כל האיברים שנמצאים במס' אי־זוגי של קבוצות מתוך $A_1, A_2, ..., A_n$.
בסיס האינדוקציה: עבור $n = 2$ ברור כי מתקיים התנאי.
נניח שהתנאי מתקיים עבור n אזי:

$$\begin{aligned}
A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n \triangle A_{n+1} = (A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n) \triangle A_{n+1} = \\
\{x \mid (x \in (A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n) \wedge x \notin A_{n+1}) \\
\Rightarrow \text{according to the assumption x in odd number of } A_i \\
or \\
(x \in A_{n+1} \wedge x \notin (A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n)) \\
\Rightarrow \text{ than x in one grupe + even number} \\
\text{of grupes from } A_i \text{ (according to the assumption)}\}
\end{aligned}$$

הסבר: טעות נפוצה היא לטעון כך: $x \in A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n \triangle A_{n+1}$ אזי או ש־$x \in A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n \wedge x \notin A_{n+1}$ ואז הוא במספר אי זוגי של קבוצות לפי הנחת האינדוקציה (שזה נכון). או ש־$x \in A_{n+1} \wedge x \notin A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n$ ולכן הוא נמצא בקבוצה אחת שזה מספר אי זוגי. **זה לא נכון**, כי: מהטענה ש־$x \notin A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n$ לא נובע ש־x לא נמצא באף קבוצה (x יכול להיות בחלק מהקבוצות ולא להיות בהפרש). מה שכן אפשר לומר, לפי הנחת האינדוקציה, אם $x \notin A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n$ אז x נמצא במספר זוגי של קבוצות $A_1, A_2, \cdots, A_n$. ולכן כיון ש $x \in A_{n+1}$ וגם במספר זוגי של הקבוצות $A_1, A_2, \cdots, A_n$ (0 הוא מספר זוגי) סה"כ x נמצא במספר אי זוגי של קבוצות.

2. יהי A פסוק. נגדיר באינדוציה את הפסוקים הבאים

$$P_0 = A$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : P_n = \neg P_{n-1} \vee A$$

הוכח:
א. לכל n אי זוגי P_n טאוטולוגיה.

ב. לכל n זוגי $P_n \equiv A$.

פיתרון

א. בסיס: עבור $n = 1$ אנחנו מקבלים את הפסוק $\neg A \vee A$ שהוא טאוטולוגיה.

צעד: נניח נכונוצת עבור n אי־זוגי ונוכיח עבור $n + 2$:

$$P_{n+2} = \neg P_{n+1} \vee A = \neg(\neg P_n \vee A) \vee A = (P_n \wedge \neg A) \vee A = (T \wedge \neg A) \vee A = \neg A \vee A = T$$

נסביר את המעברים (משמאל לימין): המעברים הראשון והשני זה ישירות מההגדרה האינדוקטיבית. המעבר השלישי זה דה־מורגן. הרביעי זה השימוש בהנחת האינדוקציה. החמישי נובע מטבלת האמת של "וגם". המעבר השישי והאחרון היה בתרגול כשדיברנו על טאוטולוגיה.

ב. בסיס: עבור $n = 0$ זה לפי ההגדרה (כן, אפשר להתחיל אינדוקציה גם מאפס).

צעד: נניח נכונות עבור n זוגי ונוכיח עבור $n + 2$:

$$P_{n+2} = \neg P_{n+1} \vee A = \neg(\neg P_n \vee A) \vee A = (P_n \wedge \neg A) \vee A = (A \wedge \neg A) \vee A = F \vee A = A$$

הסבר המעברים: הראשון עד הרביעי (כולל) כמו בסעיף א. החמישי והשישי נובעים מטבלאות האמת של "וגם" ו"או".