תשע"ה סמסטר קיץ ־ פתרון הבוחן לדוגמא בבדידה

תרגיל 1:
יהא A פסוק. נגדיר בעזרת אינדוקציה פסוקים:

$$P_0 = A$$
$$P_n = P_{n-1} \to A$$

הוכיחו כי P_n טואוטולוגיה כאשר n אי־זוגי.
פתרון:
נוכיח באינדוקציה כי לכל n אי־זוגי, הפסוק P_n הוא טואוטולוגיה.
בדיקה: עבור $n = 1$, הפסוק הוא $A \to A$. הוא אכן טואוטולוגיה:

- אם $A = F$ נקבל $F \to F$ ־ אכן אמת.
- אם $A = T$ נקבל $T \to T$ ־ אכן אמת.

צעד: כעת, נניח את נכונות הטענה עבור n אי־זוגי, ונוכיח עבור האי־זוגי הבא בתור, כלומר $n + 2$. מתקיים:

$$P_{n+2} = P_{n+1} \to A = (P_n \to A) \to A$$

נראה כי זו אכן טואוטולוגיה. ראשית, לפי ההנחה, $P_n \equiv T$ לכל ערך של A.

- אם $A = F$, נקבל $F \to F \equiv F \to (T \to F)$ ־ אכן אמת.
- אם $A = T$, נקבל $T \to T \equiv T \to (T \to T)$ ־ אכן אמת.

וסיימנו באינדוקציה.

תרגיל 2:
תהי $A \neq \phi$ קבוצה ותהי $B \subseteq A$ תת־קבוצה (סופית) שלה. נגדיר על $P(A)$ את היחס:

$$R_B = \{(C, D) \mid C \cap B = C \cap D\}$$

1. הוכיחו כי R_B יחס שקילות.
2. תארו את קבוצת המנה.
3. עבור אילו B היחס הוא יחס סדר?

פתרון:
1. נוכיח את שלוש התכונות.

- רפלקסיבי - לכל $C \in P(A)$ צ"ל $(C, C) \in R_B$ - זה נכון כי $C \cap B = C \cap B$.
- סימטרי - נניח כי עבור $C, D \in P(A)$ מתקיים $(C, D) \in R_B$ - אזי $C \cap B = D \cap B$, לכן גם $D \cap B = C \cap B$, לכן $(D, C) \in R_B$.
- טרנזיטיבי - נניח כי $C, D, E \in P(A)$ כך ש־$(C, D) \in R_B$ וגם $(D, E) \in R_B$. אז $C \cap B = D \cap B$ וגם $D \cap B = E \cap B$, ולכן $C \cap B = E \cap B$ מה שאומר ש־$(C, E) \in R_B$.

2. ניקח תת־קבוצה $B' \subseteq B$, ונביט במחלקת השקילות שלה $[B']$. לפי הגדרה

$$[B'] = \{C \in P(A) \mid C \cap B = B' \cap B\} = \{C \in P(A) \mid C \cap B = B'\}$$

כי מתקיים $B' \subseteq B$. כלומר, מחלקת השקילות היא אוסף הקבוצות שהחיתוך שלהן עם B הינו תת־הקבוצה B'. נטען שאלו הן כל מחלקות השקילות:
ראשית, עבור שתי תתי־קבוצות שונות $B' \neq B''$ של B מתקיים $[B'] \neq [B'']$ - למשל כי $B' \notin [B'']$ - שכן **לא** מתקיים השוויון $B' = B' \cap B = B'' \cap B = B''$.
כעת, לכל $X \in P(A)$, מתקיים $(X, X \cap B) \in R_B$, כי מתקיים $X \cap B = (X \cap B) \cap B$.
לכן: $[X] = [X \cap B]$, ו־$X \cap B \subseteq B$ - כלומר כל מחלקה שווה למחלקה של תת־קבוצה של B.
לסיכום:

$$P(A)/R_B = \{[B'] \mid B' \subseteq B\}$$

ובפרט מספר האיברים הוא כמספר תת־הקבוצות של B, כלומר כגדול הקבוצה $P(B)$, כלומר $2^{|B|}$.

3. יחס סדר הוא יחס רפלקסיבי, טרנזיטיבי ואנטי־סימטרי. היות ששתי התכונות הראשונות מתקיימות תמיד, נותר לבדוק מתי היחס R_B הינו אנטי־סימטרי. כלומר, לכל C, D כך ש־$(C, D) \in R_B$ וגם $(D, C) \in R_B$ צריך להתקיים $D = C$. היות שהיחס סימטרי, מספיק להניח $(D, C) \in R_B$ ולהסיק $D = C$. כלומר צריך להתקיים שמכך ש־$D \cap B = C \cap B$ לכל C, D, מתקיים $D = C$.
ראשית, נשים לב שהטענה נכונה כאשר $B = A$ (כל הקבוצה) - אז יתקיים $D = D \cap A = C \cap A = C$. נוכיח שזהו המקרה היחיד - כלומר, לכל $B \subset A$ תת־קבוצה ממש, ניתן

דוגמא ל־$C \neq D$ כך ש־$C \cap B = D \cap B$. לצורך כך, נשים לב שנתון ש־B מוכלת ממש, לכן קיים $x \in A \setminus B$. נביט ב־$C = \{x\}, D = \phi$ ־ מתקיים $(C, D) \in B$, שכן

$$\{x\} \cap B = \phi = \phi \cap B$$

כאשר המעבר הראשון נכון כי $x \notin B$.

תרגיל 3:

הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

1. לכל שתי קבוצות A, B מתקיים $(A\Delta B)\Delta(A\cap B) = A\cup B$.
2. לכל שלוש קבוצות A, B, C מתקיים $A\setminus(B\setminus C) = (A\setminus B)\setminus C$.
3. לכל שתי קבוצות A, B מתקיים $A\cap[(B\cup A^c)\cap B^c] = \phi$.

פתרון:

1. נוכיח את הטענה (הקיצורים - $\mathrm{def.}$ - פירושו הגדרה; $\mathrm{dist.}$פירושו דיסטריוטיביות=פילוג; assocפירושו אסוציאטיביות=קיבוץ).

$$\begin{aligned}
&(A\Delta B)\Delta(A\cap B) \overset{\mathrm{def.}}{=} [(A\cup B)\setminus(A\cap B)]\Delta(A\cap B) \overset{\mathrm{def.}}{=}\\
&\{[(A\cup B)\setminus(A\cap B)]\cup(A\cap B)\}\setminus\{[(A\cup B)\setminus(A\cap B)]\cap(A\cap B)\} \overset{X\setminus Y=X\cap Y^c}{=}\\
&\{[(A\cup B)\cap(A\cap B)^c]\cup(A\cap B)\}\setminus\{[(A\cup B)\cap(A\cap B)^c]\cap(A\cap B)\} \overset{\mathrm{assoc.}}{=}\\
&\{[(A\cup B)\cap(A\cap B)^c]\cup(A\cap B)\}\setminus\{(A\cup B)\cap[(A\cap B)^c\cap(A\cap B)]\} =\\
&\{[(A\cup B)\cap(A\cap B)^c]\cup(A\cap B)\}\setminus\phi = [(A\cup B)\cap(A\cap B)^c]\cup(A\cap B) \overset{\mathrm{dist.}}{=}\\
&[(A\cup B)\cap(A\cap B)]\cup[(A\cap B)^c\cap(A\cap B)] \overset{X\cap X^c=\phi}{=}\\
&[(A\cup B)\cap(A\cap B)] = A\cup B
\end{aligned}$$

2. נפריך על ידי דוגמא נגדית. ניקח $A = C \neq \phi$ ו־$B = \phi$; אז:

$$\begin{aligned}
&A\setminus(B\setminus C) = A\setminus\phi = A\\
&(A\setminus B)\setminus C = A\setminus C = \phi
\end{aligned}$$

3. נוכיח:

$$\begin{aligned}
&A\cap[(B\cup A^c)\cap B^c] \overset{\mathrm{dist.}}{=} A\cap[(B\cap B^c)\cup(A^c\cap B^c)] =\\
&A\cap(A^c\cap B^c) \overset{\mathrm{assoc.}}{=} (A\cap A^c)\cap B^c = \phi\cap B^c = \phi
\end{aligned}$$