פתרון תרגיל 7 גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית תשעו

5 במאי 2016

1. נתבונן בפרמטריזציה הבאה של מישור xy:

$$r\left(u,v\right)=\left(u,v,0\right)$$

כאשר $(u,v)\in\mathbb{R}^2$. וקטורי הנגזרות הם:

$$r_u=\left(1,0,0\right),r_v=\left(0,1,0\right)$$

מכיוון שהוקטורים אורתונורמליים, נקבל:

$$g_{11}=r_u\cdot r_u=1,g_{12}=g_{21}=r_u\cdot r_v=0,g_{22}=r_v\cdot r_v=1$$

ולכן:

$$G=\left(\begin{array}{cc}1 & 0\\0 & 1\end{array}\right)$$

כעת, אם נגזור מי מאיברי G נקבל 0, ולכן:

$$\Gamma_{ij}^{k}=0$$

לכל $1\leq i,j,k\leq2$.

2. נזכור שהתבנית היסודית הראשונה של משטח סיבוב היא:

$$G=\left(\begin{array}{cc}f^2\left(s\right) & 0\\0 & 1\end{array}\right)$$

לכן:

$$G^{-1}=\left(\begin{array}{cc}\frac{1}{f^2(s)} & 0\\0 & 1\end{array}\right),\frac{\partial G}{\partial\theta}=\left(\begin{array}{cc}0 & 0\\0 & 0\end{array}\right),\frac{\partial G}{\partial s}=\left(\begin{array}{cc}2f\left(s\right)f'\left(s\right) & 0\\0 & 0\end{array}\right)$$

אם כן,

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{11} \left(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1} \right) + \frac{1}{2} g^{12} \left(g_{21,1} + g_{21,1} - g_{11,2} \right) = 0$$

$$\Gamma^1_{12} = \frac{1}{2} g^{11} \left(g_{11,2} + g_{12,1} - g_{12,1} \right) + \frac{1}{2} g^{12} \left(g_{21,2} + g_{22,1} - g_{12,2} \right) = \frac{1}{2} \frac{2f(s) f'(s)}{f^2(s)}$$

כלומר $\Gamma^1_{12} = \frac{f'}{f}$. לכן גם $\Gamma^1_{21} = \frac{f'}{f}$. כמו כן, $\Gamma^1_{22} = 0$.
באופן דומה מחשבים את Γ^2_{ij}:

$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2} g^{21} \left(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1} \right) + \frac{1}{2} g^{22} \left(g_{21,1} + g_{21,1} - g_{11,2} \right) = f(s) f'(s)$$

$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \frac{1}{2} g^{21} \left(g_{11,2} + g_{12,1} - g_{12,1} \right) + \frac{1}{2} g^{22} \left(g_{21,2} + g_{22,1} - g_{12,2} \right) = 0$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2} g^{21} \left(g_{21,2} + g_{12,2} - g_{22,1} \right) + \frac{1}{2} g^{22} \left(g_{22,2} + g_{22,2} - g_{22,2} \right) = 0$$

3. טורוס וספירת היחידה הם משטחי סיבוב, ולכן אפשר להשתמש בשאלה הקודמת כדי לחשב את מקדמי כריסטופל שלהם.
למשל, המטריקה של הטורוס:

$$r(v,s) = \left((2+\cos s)\cos v, (2+\cos s)\sin v, \sin s \right)$$

למשל, היא:

$$G = \begin{pmatrix} (2+\cos s)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ושל ספירת היחידה:

$$G = \begin{pmatrix} \sin^2 s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מציבים בנוסחאות שמצאנו בשאלה הקודמת ומקבלים את המקדמים המתאימים.

4. פרמטריזציה של הגליל היא:

$$r(u,v) = (\cos v, \sin v, u)$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$r_u = (0,0,1), r_v = (-\sin v, \cos v, 0)$$

נחשב את מקדמי המטריקה:

$$g_{11} = \langle r_u, r_u \rangle = 1$$
$$g_{12} = g_{21} = \langle r_u, r_v \rangle = 0$$
$$g_{22} = \langle r_v, r_v \rangle = \sin^2 v + \cos^2 v = 1$$

ואם כן:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כמו בשאלה על המישור, נקבל שמקדמי כריסטופל כולם מתאפסים: $\Gamma_{ij}^k = 0$.
לכן, המשוואות הגיאודזיות הן:

$$\begin{cases} (\gamma^1)'' + \Gamma_{ij}^1 (\gamma^1)'(\gamma^2)' = 0 \Longrightarrow (\gamma^1)'' = 0 \\ (\gamma^2)'' + \Gamma_{ij}^2 (\gamma^1)'(\gamma^2)' = 0 \Longrightarrow (\gamma^2)'' = 0 \end{cases}$$

כלומר, הנגזרות השניות מתאפסות.
נאטגרץ פעמיים ונקבל:

$$\begin{cases} \gamma^1(t) = at + b \\ \gamma^2(t) = ct + d \end{cases}$$

כלומר, $\gamma(t) = (b, d) + (a, c)t$, קו ישר.
אם כן, העקומות המישוריות שנותנות את העקומות הגיאודזיות הן בעצמן העקומות הגיאודזיות במישור.
אינטואיטיבית הדבר הגיוני, מכיוון שההעתקה r "מגלגלת" את המישור לגליל (ולא מותחת או מכווצת אותו), וכפי שראינו בעבר העקומות המישוריות שומרות על אורכן.

5. נשתמש בתכונות השונות של המחוברים.

(א) נזכור שמתקיים:

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 r_1 + \Gamma_{ij}^2 r_2 + b_{ij} \vec{n}$$

ולכן:

$$\langle r_{ij}, r_k \rangle = \left\langle \Gamma_{ij}^1 r_1 + \Gamma_{ij}^2 r_2 + b_{ij} \vec{n}, r_k \right\rangle = \Gamma_{ij}^1 \langle r_1, r_k \rangle + \Gamma_{ij}^2 \langle r_2, r_k \rangle + b_{ij} \langle \vec{n}, r_k \rangle =$$

הנורמל $\vec{n}$ מאונך לוקטור הנגזרות r_k ולכן:

$$= \Gamma_{ij}^1 \langle r_1, r_k \rangle + \Gamma_{ij}^2 \langle r_2, r_k \rangle = \Gamma_{ij}^1 g_{1k} + \Gamma_{ij}^2 g_{2k} = \Gamma_{ij}^s g_{sk}$$

(ב) נגזור לפי כלל לייבניץ:

$$g_{ij,k}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}=\frac{\partial}{\partial u^k}\left\langle r_i,r_j\right\rangle=\left\langle r_{ik},r_j\right\rangle+\left\langle r_i,r_{jk}\right\rangle$$

נגזרת לפי u^k פירושה לגזור לפי המשתנה ה$-k$ כמובן.

6. בפשטות לא. אפשר להתבונן במשטחים שהמטריקות שלהם הן:

$$G_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},G_2=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$$

שמתאימות למשל לגלילים עם רדיוסים שונים.

מקדמי כריסטופל בשני המטריקות מתאפסים כולם, אך הן בוודאי לא זהות.