תרגיל 12

12 ביוני 2018

פתרו את המד"רים הבאים:

1. $y'' - y = 3e^{2x}\cos x$

פתרון:

ראשית, נפתור את המד"ר ההומוגנית המתאימה. הפתרון הכללי שלה הוא: $c_1e^x + c_2e^{-x}$

כעת, ננחש פתרון פרטי מהצורה $y_p = Ae^{2x}\cos x + Be^{2x}\sin x$.

נגזור:

$$y_p' = 2Ae^{2x}\cos x - Ae^{2x}\sin x + 2Be^{2x}\sin x + Be^{2x}\cos x = (2A+B)e^{2x}\cos x + (2B-A)e^{2x}\sin x$$

ונגזור שוב:

$$y_p'' = 2(2A+B)e^{2x}\cos x - (2A+B)e^{2x}\sin x + 2(2B-A)e^{2x}\sin x + (2B-A)e^{2x}\cos x$$

נציב:

$$2(2A+B)e^{2x}\cos x - (2A+B)e^{2x}\sin x + 2(2B-A)e^{2x}\sin x + (2B-A)e^{2x}\cos x - Ae^{2x}\cos x - Be^{2x}\sin x = 3e^{2x}\cos x$$

מהשוואת מקדמים נקבל:

$$2A + 4B = 3$$

$$-4A + 2B = 0$$

לכן: $A = \frac{3}{10}, B = \frac{3}{5}$

$$y_p = \frac{3}{10}e^x\cos x + \frac{3}{5}e^x\sin x$$

והפתרון הכללי הוא: $y = c_1e^x + c_2e^x + \frac{3}{10}e^x\cos x + \frac{3}{5}e^x\sin x$.

2. $y'' + 2y' + 5y = \sin x$

פתרון:

ראשית, נפתור את המד"ר ההומוגנית המתאימה. הפתרון הכללי שלה הוא: $c_1e^{-x}\cos x + c_2e^{-x}\sin x$

כעת, ננחש פתרון פרטי מהצורה $y_p = A\cos x + B\sin x$.

נגזור:

$$y_p' = -A\sin x + B\cos x$$

ונגזור שוב:

$$y_p'' = -A\cos x - B\sin x$$

נציב:

$$-A\cos x - B\sin x - 2A\sin x + 2B\cos x + 5A\cos x + 5B\sin x = \sin x$$

מהשוואת מקדמים נקבל:

$$4B - 2A = 1$$

$$4A + 2B = 0$$

לכן: $A = -\frac{1}{10}, B = \frac{1}{5}$

$$y_p = -\frac{1}{10}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$$

והפתרון הכללי הוא: $y = c_1 e^{-x}\cos x + c_2 e^{-x}\sin x - \frac{1}{10}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$.

3. $y'' + 9y = 4\sin 3x$

פתרון:

ראשית, נמצא פתרון כללי למערכת ההומוגנית: $y'' + 9y = 0$.

המשוואה האופיינית היא $\lambda^2 + 9 = 0$. יש לה שני שורשים מרוכבים: $\lambda_1 = 3i, \lambda_2 = -3i$. לכן הפתרון הכללי למערכת ההומוגנית הוא: $y_0 = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x$.

כעת, נמצא פתרון פרטי למערכת הלא הומוגנית.

מכיוון ש$\sin 3x$ הוא כבר פתרון של ההומוגנית, ננחש פתרון מהצורה:

$$y_p = Ax\cos 3x + Bx\sin 3x$$

נגזור: $y_p' = A\cos 3x - 3Ax\sin 3x + B\sin 3x + 3Bx\cos 3x$

$$y_p'' = -3A\sin 3x - 3A\sin 3x - 9Ax\cos 3x + 3B\cos 3x + 3B\cos 3x - 9Bx\sin 3x$$

נציב:

$$-6A\sin 3x - 9Ax\cos 3x + 6B\cos 3x - 9Bx\sin 3x + 9Ax\cos 3x + 9Bx\sin 3x = 4\sin 3x$$

לכן $B = 0, A = -\frac{2}{3}$

כלומר, $y_p = -\frac{2}{3}x\cos 3x$

והפתרון הכללי הוא: $y = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x - \frac{2}{3}x\cos 3x$.

4. $y'' - 2y' = 6x^2 - 2e^{3x}$

פתרון:

ראשית, נפתור את המערכת ההומוגנית המתאימה. הפתרון הכללי שלה הוא: $c_1 + c_2e^{2x}$

כעת, נסמן: $f(x) = 6x^2, g(x) = -2e^{3x}$

נפתור עבור $f(x)$:

ננחש פתרון מהצורה $y_{p,1} = Ax^3 + Bx^2 + Cx$

נגזור: $y'_{p,1} = 3Ax^2 + 2Bx + C$

$$y''_{p,1} = 6Ax + 2B$$

נציב במשוואה:

$$6Ax + 2B - 6Ax^2 - 4Bx - 2C = 6x^2$$

$$A = -1, B = -\frac{3}{2}, C = -\frac{3}{2}$$

$$y_{p,1} = x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$$

כעת, נפתור עבור $g(x)$:

ננחש פתרון מהצורה $y_{p,2} = De^{3x}$

נגזור: $y'_{p,2} = 3De^{3x}$

$$y''_{p,2} = 9De^{3x}$$

נציב במשוואה:

$$9De^{3x} - 6De^{3x} = -2e^{3x}$$

$$D = \frac{2}{3}$$

$$y_{p.2} = \frac{2}{3}e^{3x}$$

ולבסוף, הפתרון הכללי של המשוואה המקורית הוא:

$$y = c_1 + c_2e^{2x} + x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{2}{3}e^{3x}.$$