מבנים דיסקרטיים – תרגיל 5

להגשה: 21.5.2013

1) תהי פונקצייה $\phi: GL_2(R) \to GL_2(R)$ המקיימת $\phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$. האם

היא איזומורפיזם?

פיתרון:

תהיינה שתי מטריצות $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$. המכפלה שלהן היא

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}.$$

$$\varphi\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cy+dw & -cx-dz \\ -ay-bw & ax+bz \end{pmatrix}.$$

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix},\ \varphi\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & -z \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

כלומר $\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w & -z \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dw+cy & -dz-cx \\ -bw-ay & bz+ax \end{pmatrix}$

מתקיים $\varphi(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}) = \varphi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$, ולכן φ הומומורפיזם.

כעת, $\varphi \circ \varphi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, כלומר $\varphi \circ \varphi = id$, משמע φ פונקציה

הפיכה, ולכן איזומורפיזם.

2. תהי $G=\{1,-1,i,j,ij,-i,-j,-ij\}$ חבורה עם פעולת כפל המוגדרת $i^2=j^2=-1$ ו $ji=-ij$. מצאו תת-חבורה H כך ש $[G:H]=4$.

פיתרון:

ניקח את תת-החבורה $H=\{1,-1\}$. מכיוון ש $|H|=2$ ו $|G|=8$ אז אוטומטית מתקיים $[G:H]=4$.

3. . כזכור איזומורפיזם של חבורות $f:G\to H$ שומר פעולה, חח"ע ועל. הוכיחו:

א. שהוא גם מעביר יחידה ליחידה (כלומר: $f(e_G)=e_H$).

$$\forall a\in G \qquad f(a)f(e)=f(ae)=f(a)=f(ea)=f(e)f(a)\Rightarrow f(e_G)=e_H$$

$\longleftrightarrow$

ב. שהוא גם מעביר הופכי להופכי (כלומר: $f(a^{-1})=(f(a))^{-1}$).

$$\forall a\in G \qquad f(a)f(a^{-1})=f(aa^{-1})=e_H=f(e_G)=f(a^{-1}a)=f(a^{-1})f(a)\Rightarrow f(a^{-1})=(f(a))^{-1}$$

$\longleftrightarrow$

ג.הוא גם מעביר חזקה לחזקה (כלומר: $f(a^n)=(f(a))^n$).

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad f(a^n)=f(a\cdot\ldots\cdot a)=f(a)\cdot\ldots\cdot f(a)=(f(a))^n$$

הדבר נכון גם לגבי חזקות שלמות, ולא רק לגבי חזקות טבעיות, כאשר משתמשים בסעיפים א+ב.

ד.שסדר איבר בתחום הוא כסדר תמונתו בטווח(כלומר: $a^m=e_G\Rightarrow (f(a))^m=e_H$).

$$a^m=e_G\Rightarrow e_H\underset{\text{א}}{=}f(e_G)=f(a^m)\underset{\text{ג}}{=}(f(a))^m$$

אם $a^{m-1}\neq e_G\wedge e_H=(f(a))^{m-1}$ אז

$f(e_G)=e_H=(f(a))^{m-1}=f(a^{m-1})$ בסתירה לחח"ע f .

4. הראה כי $U(\mathbb{Z}_5) \cong (\mathbb{Z}_4,+)$ (ראו תרגיל 3 להגדרת $U(\mathbb{Z}_n)$) ע"י בניית איזומורפיזם ביניהן.

ניתן לבדוק ש $U(\mathbb{Z}_5) =< 2 >$, כלומר חבורה ציקלית מסדר 4. ראינו בשיעור משפט שכל חבורה ציקלית מסדר n איזומורפית ל $\mathbb{Z}_n$, אבל ניתן לבנות את האיזומורפיזם ישירות. נגדיר $f:\mathbb{Z}_4 \to U(\mathbb{Z}_5)$ בצורה הבאה:

$$f(0)=1$$
$$\mathrm{f}(1)=2$$
$$\mathrm{f}(2)=\mathrm{f}(1+1)=\mathrm{f}(1)\mathrm{f}(1)=2^2=4$$
$$f(3)=f(1+1+1)=f(1)f(1)f(1)=2^3=3$$

ברור ש f חח"ע ועל, וקל לבדוק את תכונת הכפליות.

5. תהי G חבורה סופית ויהי $a \in G$ מסדר n, ונניח ש n=mk כאשר m,k שלמים חיוביים. הראו ש a^m הוא מסדר k.

פתרון: $(a^m)^k = a^{mk} = a^n = e$ ולכן $o(a^m) | k$. אם $o(a^m) < k$ אזי $\mathrm{e} = (a^m)^{o(a^m)} = a^{mo(a^m)}$ כלומר $o(a) \le o(a^m)\mathrm{m} < \mathrm{km}$, סתירה.

6.

א. האם $(\mathbb{R},+,0)$ איזומורפי ל $(\mathbb{Q},+,0)$?

לא, הקבוצות הן מעצמה שונה (ולכן אין פונ' חח"ע ועל ביניהן).

ב. האם $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot,1)$ איזומורפי ל $(\mathbb{R},+,0)$?

לא, ב $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ יש איבר מסדר 2 והוא (-1), ואילו ב $\mathbb{R}$ כל האיברים מסדר אינסופי.

ג. האם $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot,1)$ איזומורפי ל $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot,0)$?

לא, ב $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ האיבר i הוא מסדר 4, ואילו ב $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ אין איברים מסדר 4, מדוע?

זאת כיוון שאם $x \in \mathbb{R} \setminus 0$ מסדר 4 אזי $x^4 = 1$. זה קורה אם ורק אם $x^4 - 1 = 0$, אם ורק אם $(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}+1)(x^2+1) = (x^2-1)(x^2+1) = 0$. פרט ל ± 1 אין לפולינום הזה פתרונות ב $\mathbb{R}$ ואלו אינם איברים מסדר 4.