20.12.2020

תרגול 9
תורת גלואה

K/F הרחבת גלואה, G

נורמה:

$$N_{K/F}(x) = \prod_{\sigma \in G} \sigma(x) \in K^G = F$$

עקבה:

$$Tr_{K/F}(x) = \sum_{\sigma \in G} \sigma(x) \in K^G = F$$

$$N_{K/F}(x) = \prod_{\sigma \in G} x = x^{|G|} = x^{[K:F]}$$

$x \in F$

הרחבה ריבועית $(char \neq 2)$

$$K = F(\sqrt{d}) \qquad d \in F$$

$$\sigma(a + b\sqrt{d}) = a - b\sqrt{d}$$

$$N_{K/F}(a + b\sqrt{d}) = a^2 - db^2$$

הערה: הנורמה היא המקדם החופשי בפ״מ (עד כדי $(-1)^{[K:F]}$), $K=F(\alpha)$

* העקבה היא מינוס המקדם הלפני אחרון בפ״מ, $K=F(\alpha)$

לפי ההצגה הרגולרית:

$$\begin{array}{ccc} K & \overset{\varphi}{\hookrightarrow} & M_{[K:F]}(F) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \alpha & & \varphi(\alpha) \end{array}$$

הרחבות ציקליות - הרחבת גלואה עם חבורת גלואה ציקלית.

משפט 90 של הילברט:

תהי K/F הרחבה ציקלית ר

$a\in K$ מנורמה 1 $\Longleftarrow$

$$\exists x\in K^{\times}: \quad a=\frac{\sigma(x)}{x}$$

(וזכור כל איבר כזה מנורמה 1)

<u>תרגיל:</u> יהי F שדה, $\mathrm{char}(F) \neq 2$.

K/F הרחבה ציקלית ממעלה 4.

יהי L תת-שדה הביניים היחיד.

הוכח קיים $x \in L$ כך ש- $N_{L/F}(x) = -1$.

<u>פתרון:</u>

$$\langle\sigma\rangle \left[\begin{array}{c} K = L(\sqrt{\Delta}) \\ 2 \Big| \Big\} \langle\sigma^2\rangle \\ L \\ 2 \Big| \Big\} \{id, \sigma\} \\ F \end{array} \right.$$

לבחירה $\Delta \in L$

$$\sigma^2(\sqrt{\Delta}) = -\sqrt{\Delta}$$

$$x = \frac{\sigma(\sqrt{\Delta})}{\sqrt{\Delta}}$$

- $\sigma^2(x) = \dfrac{\sigma^3(\sqrt{\Delta})}{\sigma^2(\sqrt{\Delta})} = \dfrac{-\sigma(\sqrt{\Delta})}{-\sqrt{\Delta}} = x \in L$

- $N_{L/F}(x) = x\sigma(x) = \dfrac{\cancel{\sigma(\sqrt{\Delta})}}{\sqrt{\Delta}} \cdot \dfrac{\sigma^2(\sqrt{\Delta})}{\cancel{\sigma(\sqrt{\Delta})}} =$

$$= \frac{-\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} = -1$$

כנ׳ שרצינו! מ.ש.ל.

<u>לסיום:</u> הוכחה של התרגיל היא להרחבה
ציקלית ממעלה זוגית ומת-שלבה.
במקום ממעלה n $(\ldots)$

<u>מסקנה:</u> אם $F \subseteq \mathbb{R}$; K/F - ציקלית
ממעלה 4 $\Longleftarrow$ את-השלבה הריבועית
ממשי ℓ_t לא יכ.

<u>הוכחה:</u> נניח $L = F(\sqrt{-\Delta})$

$$\Delta > 0$$
$$\Delta \in F$$

$$-1 \underset{\uparrow}{=} N_{L/F}(x) = a^2 + \Delta b^2 > 0$$

התרגיל הקודם

סתירה.

<u>מסקנה:</u> $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ אינו מוכל בהרחבה ציקלית
ממעלה 4 $(\mathbb{Q}$ של$)$.

(כמובן כן מוכל בהרחבה גלואה לא-ציקלית ממעלה 4
$\mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{2})$ ...)

שלשות פיתגוריות

$a,b,c \in \mathbb{Z}$

(פתרון לא-טריוויאלי)

$$a^2+b^2=c^2$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2+y^2=1$$

$$S^1(\mathbb{Q})$$

$$= N_{\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}}(x+yi)$$

ממשפט 90 אנו יודעים כי אבר בהרחבה

$\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}$ מנורמה 1 $\Longleftrightarrow$

$$x+yi = \frac{\sigma(\alpha)}{\alpha} \quad : \alpha \in \mathbb{Q}(i)$$

$$= \frac{\sigma(a+bi)}{a+bi} = \frac{a-bi}{a+bi} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{-2ab}{a^2+b^2}\, i$$

$$\left\{ \left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}, \frac{2ab}{a^2+b^2} \right) : a,b \in \mathbb{Q} \right\}$$

$\mathbb{Q}(\sqrt{D})$

בדומה:

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

$D \in \mathbb{Z}$

חופשי מריבועים

ניתן למצוא פרמטריזציה קדומה..

(Pell)

$\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{D})}$

<u>הגרסה האדיטיבית של משפט 90:</u>

הרחבה ציקלית $\langle \sigma \rangle$

$$\exists v \in K: u = \sigma(v) - v \iff Tr_{K/F}(u) = 0$$

<u>משפט</u> (ארטין-שרייר):

אם K/F הרחבה ציקלית ממעלה p

כאשר $p = char(F)$ אז:

$$K = F(\alpha)$$

$$m_\alpha(\lambda) = \lambda^p - \lambda - \theta \qquad (\theta \in F)$$

הוכחה: "רגילה"

$$\lambda^p - \lambda = \prod_{j=0}^{p-1} (\lambda - j)$$

נרצה למצוא איבר ש-

$$\exists v \in K : \sigma(v) = v + 1$$

$$\iff 1 = \sigma(v) - v$$

$$\operatorname{Tr}_{K/F}(1) = p \cdot 1 = 0$$ אז

וקיים v כזה לפי הגרסה האדיטיבית.

$$\sigma(v^p - v) = \sigma(v)^p - \sigma(v) =$$

$$= (v+1)^p - (v+1) =$$

$$= v^p + 1 - (v+1) = v^p - v$$

$$\Rightarrow \underbrace{v^p - v}_{\theta} \in K^\sigma = F$$

$$v^p - v - \theta = 0$$

כמובן, זהו הפ"מ של v.

מ.ש.ל.