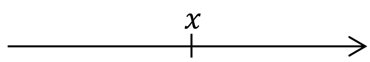
חשבון אינפיניטסימלי 3

המרחב $\mathbb{R}^n$

הציר הממשי



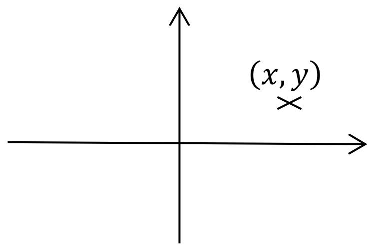
נקודה:

$$x$$

מרחק:

$$d(x,y) \quad = \quad |x-y|$$

המישור הממשי



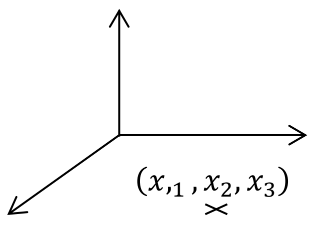
נקודה:

$$x \quad = \quad (x_1, x_2)$$

מרחק:

$$d(x,y) \quad = \quad \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

המרחב הממשי



נקודה:

$$x \quad = \quad (x_1, x_2, x_3)$$

מרחק:

$$d(x,y) \quad = \quad \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$$

הגדרה

קבוצה $\mathbb{R}^n$, עבור $n\in\mathbb{N}$, היא אוסף כל ה – n-יות הסדורות של מספרים ממשים.

כלומר:

$$\mathbb{R}^n \quad := \quad \{x=(x_1,\cdots,x_n) \mid \forall 1\le i\le n : x_i\in\mathbb{R}\}$$

איבר:

$$x \quad = \quad (x_1,\cdots,x_n) \quad \in \quad \mathbb{R}^n$$

נקרא **נקודה** בעלת קואורדינטות x_i.

הגדרה

נגדיר **חיבור** של שתי נקודות:

$$x \quad = \quad (x_1,\cdots,x_n) \quad \in \quad \mathbb{R}^n$$

$$y \quad = \quad (y_1,\cdots,y_n) \quad \in \quad \mathbb{R}^n$$

על ידי:

$$x+y \quad := \quad (x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n)$$

הגדרה

נגדיר **כפל** של נקודה:

$$x \quad = \quad (x_1,\cdots,x_n) \quad \in \quad \mathbb{R}^n$$

בסקלר:

$$\alpha \quad \in \quad \mathbb{R}$$

על ידי:

$$\alpha\cdot x \quad := \quad (\alpha\cdot x_1,\cdots,\alpha\cdot x_n)$$

הגדרה

הבסיס הסטנדרטי ב - $\mathbb{R}^n$ הוא אוסף הווקטורים:

$$e_1 = (1,0,\cdots,0)$$
$$e_2 = (0,1,0,\cdots,0)$$
$$\vdots$$
$$e_n = (0,\cdots,0,1)$$

כל נקודה:

$$x = (x_1,\cdots,x_n)$$

ניתנת להצגה על ידי:

$$x = x_1 \cdot e_1 + \cdots + x_n \cdot e_n$$

הגדרה

מכפלה סקלרית של שתי נקודות:

$$x = (x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n$$
$$y = (y_1,\cdots,y_n) \in \mathbb{R}^n$$

מוגדרת על ידי:

$$x \cdot y := x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n$$

הגדרה

הנורמה (או **האורך**) של נקודה:

$$x = (x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n$$

מוגדרת על ידי:

$$||x|| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

למה (אי שוויון קושי שוורץ)

לכל $x, y, \in \mathbb{R}^n$ מתקיים:

$$|x \cdot y| \leq ||x|| \cdot ||y||$$

הוכחה

לכל $\alpha \in \mathbb{R}$, מתקיים:

$$\begin{aligned} 0 &\leq ||x-\alpha y||^2 \\ &\leq (x-\alpha y)\cdot(x-\alpha y) \\ &\leq ||x||^2 - 2\alpha xy + \alpha^2||y||^2 \end{aligned}$$

לכן:

$$\Delta(||x||^2 - 2\alpha xy + \alpha^2||y||^2) \leq 0$$

לכן:

$$4\cdot(xy)^2 \leq 4||x||^2||y||^2$$

לכן:

$$|x\cdot y| \leq ||x||\cdot||y||$$

■

למה

הנורמה מקיימת את התכונות הבאות:

1. <u>אי שליליות</u>: לכל $x \in \mathbb{R}^n$:

$$||x|| \geq 0$$

וכן:

$$||x|| = 0 \iff x = 0$$

2. <u>כפל בסקלר</u>: לכל $x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$:

$$||\alpha x|| = |\alpha|\cdot||x||$$

3. <u>אי שוויון המשולש</u>: לכל $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$$

הוכחה

נוכיח את (3).

עפ"י אי שוויון קושי שוורץ:

$$\begin{aligned}||x+y||^2 &= (x+y)\cdot(x+y)\\ &= ||x||^2+2|xy|+||y||^2\\ &\le ||x||^2+2||x||\cdot||y||+||y||^2\\ &\le (||x||+||y||)^2\end{aligned}$$

לכן:

$$||x+y|| \le ||x||+||y||$$

■

הגדרה

לכל $1 \le p < \infty$, נגדיר נורמה:

$$||x||_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p}$$

הגדרה

נגדיר **מרחק** בין שתי נקודות $x,y \in \mathbb{R}^n$ על ידי:

$$d(x,y) := ||x-y|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

הערה

לכל $x,y,z \in \mathbb{R}^n$:

$$d(x,y) \le d(x,z)+d(y,z)$$

תכונה זו של המרחק נקראת אי שוויון המשולש, והיא נובעת מאי שוויון המשולש לנורמה.

הגדרה

יהיו $a \in \mathbb{R}^n$ ו- $0 < r$.

כדור פתוח עם מרכז a ורדיוס r מוגדר על ידי:

$$B(a,r) \quad \coloneqq \quad \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,a) < r\}$$

כדור סגור עם מרכז a ורדיוס r מוגדר על ידי:

$$B[a,r] \quad \coloneqq \quad \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,a) \leq r\}$$

הגדרה

יהיו $a,b \in \mathbb{R}^n$, כך שלכל $1 \leq i \leq n$, $a_i < b_i$.

תיבה פתוחה היא הקבוצה:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall 1 \leq i \leq n :\ a_i < x_i < b_i\}$$

תיבה סגורה היא הקבוצה:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall 1 \leq i \leq n :\ a_i \leq x_i \leq b_i\}$$

אם לכל $1 \leq i \leq n$, $b_i - a_1 = h$, אז לתיבה קוראים **קוביה**.

סדרות ב - $\mathbb{R}^n$

הגדרה

סדרה $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ של נקודות מ - $\mathbb{R}^n$ היא התאמה של נקודה $x_k \in \mathbb{R}^n$ לכל מספר $k \in \mathbb{N}$.

הגדרה

סדרה $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ של נקודות מ - $\mathbb{R}^n$ **מתכנסת לגבול** $a \in \mathbb{R}^n$, אם לכל $0 < \varepsilon$, קיים $N \in \mathbb{N}$, כך שלכל $N \le k \in \mathbb{N}$, מתקיים:

$$d(x_k, a) \quad < \quad \varepsilon$$

במקרה זה, ל – a קוראים **גבול הסדרה** $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, ומסמנים:

$$a \quad := \quad \lim_{k\to\infty} x_k$$

משפט

סדרת הנקודות $\left\{x_k = \left(x_1^k, \cdots, x_n^k\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת לנקודה $a = (a_1, \cdots, a_n)$ אם ורק אם לכל $1 \le i \le n$:

$$\lim_{k\to\infty} x_i^k \quad = \quad a_i$$

הוכחה

$\boxed{\Leftarrow}$

נניח כי:

$$\lim_{k\to\infty} x_k \quad = \quad a$$

לכל $x \in \mathbb{R}^n$, לכל $1 \le i \le n$ מתקיים:

$$|x_i| \quad \le \quad ||x||$$

לכן, לכל $1 \le i \le n$, לכל $0 < \varepsilon$, קיים $N \in \mathbb{N}$, כך שלכל $N \le k \in \mathbb{N}$, מתקיים:

$$\begin{aligned} \left|x_i^k - a_i\right| \quad &\le \quad ||x_k - a|| \\ &< \quad \varepsilon \end{aligned}$$

לכן, לכל $1 \le i \le n$:

$$\lim_{k\to\infty} x_i^k = a_i$$

$\boxed{\Longrightarrow}$

נניח כי לכל $1 \leq i \leq n$:

$$\lim_{k\to\infty} x_i^k = a_i$$

לכן, לכל $0 < \varepsilon$, לכל $1 \leq i \leq n$, קיים $N_i \in \mathbb{N}$, כל שלכל $N_i \leq k \in \mathbb{N}$, מתקיים:

$$\left|x_i^k - a_i\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

נגדיר:

$$N := \max_{1\leq i\leq n} N_i$$

לכן, לכל $N \leq k \in \mathbb{N}$, מתקיים:

$$\begin{aligned} d(x_k, a) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^k - a_i\right)^2} \\ &< \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{n}} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

לכן:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a$$

■

הגדרה

סדרה $\{x_k\}$ נקראת **סדרה חסומה** אם קיים $0 < M \in \mathbb{R}$, כך שלכל $k \in \mathbb{N}$:

$$||x_k|| \leq M$$

הגדרה

סדרה $\{x_k\}$ נקראת **סדרת קושי** אם לכל $\varepsilon > 0$, קיים $N \in \mathbb{N}$, כל שלכל $N \leq k, m \in \mathbb{N}$, מתקיים:

$$d(x_k, x_m) \quad < \quad \varepsilon$$

משפט

אם סדרה מתכנסת, אז היא חסומה.

משפט

סדרה מתכנסת אם ורק אם היא סדרת קושי.

הוכחות שני המשפטים נובעות מהמשפט האחרון ומהמשפטים הדומים עבור $n = 1$.

משפט (בולצאנו ויירשטרס)

לכל סדרה חסומה קיימת תת סדרה מתכנסת.

הוכחה

נוכיח באינדוקציה.

<u>בסיס: $n = 1$</u>

עפ״י משפט בולצאנו ויירשטרס לסדרות של מספרים ממשיים מהקורס חשבון אינפיניטסימלי 1.

<u>צעד: $n > 1$</u>

נניח נכונות הטענה עבור $n - 1$, ונוכיח נכונות הטענה עבור n.

תהי $\{x_k\}$ סדרה חסומה.

נרשום:

$$x_k \quad = \quad (x_k^1, x_k^2)$$

כאשר:

$$x_k^1 \quad \in \quad \mathbb{R}$$

$$x_k^2 \quad \in \quad \mathbb{R}^{n-1}$$

עפ״י המשפט עבור $n = 1$, לסדרה החסומה $\{x_k^1\}$ קיימת תת סדרה מתכנסת $\{x_{k_i}^1\}$.

נתבונן בסדרה $\{x_{k_i}^2\}$.

עפ"י המשפט עבור $n-1$, לסדרה החסומה $\{x_{k_i}^2\}$ קיימת תת סדרה מתכנסת $\left\{x_{k_{i_j}}^2\right\}$.

כמו כן, הסדרה $\left\{x_{k_{i_j}}^1\right\}$ מתכנסת (כתת סדרה של סדרה מתכנסת).

באופן דומה להוכחת הכיוון השני במשפט הקודם, נקבל כי תת הסדרה $\left\{x_{k_{i_j}}\right\}$ של הסדרה $\{x_k\}$ מתכנסת.

■