10. מטריצה מייצגת של אופרטור. דמיון מטריצות

1. כתוב מטריצה של אופרטור $T: R^2 \to R^2$ בבסיס הסטנדרטי, כאשר T מסובב וקטורים לפי כיוון השעון בזווית 90°. מצא גרעין של ההעתקה הנתונה.

תשובה: $[T]_e = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $KerT = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

2. כתוב מטריצה של העתקה $T: R^2 \to R^2$ בבסיס הסטנדרטי, כאשר T משקפת וקטורים כלפי הישר $y = -x$. מצא מקור לווקטור $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

תשובה: $[T]_e = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $T(\vec{c}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

3. כתוב מטריצה של העתקה $T: R^2 \to R^4$ בבסיסים הסטנדרטיים כאשר $T(1,0) = (3,-1,2,1)$ ו- $T(0,1) = (0,-2,2,1)$. האם ההעתקה הנתונה היא חד-חד-ערכית? האם היא על?

תשובה: $[T]_e = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, ההעתקה חח"ע ולא על.

4. אופרטור $T: R^3 \to R^3$ מיוצגת ע"י מטריצה $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ בבסיס הסטנדרטי B_e.

מצא: א. $T(0,1,0)$ ב. $T(-2,0,0)$ ג. $T(1,1,1)$ ד. $T(2,0,-3)$.

תשובה: א) $(5,7,0)$ ב) $(2,-4,6)$ ג) $(4,13,1)$ ד) $(-2,-8,-18)$

5. נתון $F: R^3 \to R^3$ העתקה ליניארית:

$F(x,y,z) = (a_1x + b_1y + c_1z,\ a_2x + b_2y + c_2z,\ a_3x + b_3y + c_3z)$, B_e - הבסיס הסטנדרטי.

הוכח, כי $[F]_e = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$.

6. מצא $[F]_e$, אם $F(x,y,z)=(x+5y-2z,\ y+5z-x,\ 3x-z)$.

תשובה: $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

7. מטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ מגדירה את העתקה $F: R^2 \to R^2$ $F(x,y)=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

מצא

א. $[F]_e$ (e - הבסיס הסטנדרטי)

ב. $[F]_f$ ($B_f=\{(1,3),\ (2,5)\}$).

תשובה: א) $[F]_e=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ב) $[F]_f=\begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$

8. יהיו F ו- G העתקות ליניאריות במרחב V מעל שדה K. f - בסיס מסוים של V ,

$A=[F]_f$, $B=[G]_f$. הוכח :

א. $A+B=[F+G]_f$

ב. $\alpha A=[\alpha F]_f$ $(\alpha \in K)$

ג. (*) $AB=[F \circ G]_f$

ד. (*) $A^{-1}=[F^{-1}]_f$ במקרה כאשר F הפיכה.

9. הוכח כי אופרטור $F: V \to V$ הפיך אם ורק אם כאשר מטריצה $A=[F]_f$ המייצגת אותו בבסיס כלשהו הפיכה.

10. הוכח כי האופרטור $F(x,y,z)=(-x,\ x-y, x+y-z)$ הפיך ומצא את האופרטור ההפוך F^{-1} .

תשובה: $F^{-1}(x,y,z)=(-x,\ -x-y, -2x-y-z)$

11. מטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 & 7 \\ -3 & -1 & 0 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ -5 & 11 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ מייצגת את האופרטור $F: R^5 \to R^5$ בבסיס $b=\{b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5\}$. מצא את המטריצה $[F]_f$ כאשר $f=\{b_1,\ b_4,\ b_3,\ b_2,\ b_5\}$.

תשובה: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 0 & 7 \\ -5 & 6 & 4 & 11 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ -3 & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

12. מטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ מגדירה את ההעתקה $F:R^{2\times2}\to R^{2\times2}$ $\quad F(M)=AM$

($R^{2\times2}$ - מרחב מטריצות ריבועיות 2×2).

מצא את ההצגה של F לפי הבסיס הסטנדרטי: $E=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$.

תשובה: א) $[F]_E=\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&2\\3&0&4&0\\0&3&0&4\end{pmatrix}$

13. יהי אופרטור $F:P_2\to P_2$ $\quad F(p(x))=p(x+1)$.

א. מצא את המטריצה $[F]_e$ המייצגת את האופרטור בבסיס הסטנדרטי $e=\{1,\ x,\ x^2\}$,

ב. (*) מצא את האופרטור F^n למספר $n\in N$ כלשהו והוכח את השוויון:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&n&n^2\\0&1&2n\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

תשובה: א) $[F]_e=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\quad$ ב) $F^n(p(x))=p(x+n)$

14. נתונים שלושה בסיסים של R^2 : הבסיס הסטנדרטי $B_e=\{(1,0),(0,1)\}$, הבסיס $B_f=\{(1,1),(-1,1)\}$, הבסיס $B_g=\{(1,3),(2,0)\}$. מצא את מטריצות המעבר הבאות:

א) $P_{e\to g}$, ב) $P_{f\to g}$, ג) $P_{f\to e}$, ד) $P_{f\to e}^{-1}$.

תשובה: א) $\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix}$ ב) $\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}$ ג) $\begin{pmatrix}0.5&0.5\\-0.5&0.5\end{pmatrix}$ ד) $\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$

15. יהי $B_f=\{\vec f_1,\vec f_2\}$ בסיס של מרחב V ו- $F:V\to V$ כך ש- $F(\vec f_1)=3\vec f_1-2\vec f_2$, $F(\vec f_2)=\vec f_1+4\vec f_2$. יהי $B_g=\{\vec g_1,\vec g_2\}$ בסיס אחר של V כך שמתקיים $\vec g_1=3\vec f_1+\vec f_2$, $\vec g_2=2\vec f_1+\vec f_2$. מצא $[F]_g$.

תשובה: $\begin{pmatrix}14&7\\-16&-7\end{pmatrix}$

16. נתון: בסיס $B_f=\{(1,-2),\,(1,-1)\}$ של R^2 והעתקה $F:R^2\to R^2$ מיוצגת ע"י המטריצה $[F]_f=\begin{pmatrix}0 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}$. מצא $F(1,-1)$, $F(-1,0)$.

תשובה: $F(-1,0)=(-13,21)$, $F(1,-1)=(6,-10)$

17. (*) הוכח את הטענה הבאה: שתי מטריצות ריבועיות ($n\times n$) A ו- B דומות ($B\sim A$) אם ורק אם הן מייצגות אותו אופרטור $F:R^n\to R^n$ בבסיסים שונים.

18. (*) הוכח כי מטריצות דומות מקיימות "יחס שקילות" , כלומר, הן מקיימים את התכונות הבאות:

א. רפלקסיביות: $A\sim A$

ב. סימטריות: אם $B\sim A$, אז $A\sim B$

ג. טרנזיטיביות: אם $B\sim A$ וגם $C\sim B$, אז $C\sim A$

19. נתון: מטריצות $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ ו- $B=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 3 & 7\end{pmatrix}$ ופולינומים $p(x)=x^2-5x-2$,
$q(x)=x^2+x-1$

א. בדוק שהמטריצות הן דומות.

ב. מצא $p(A)$, $p(B)$, $q(A)$, $q(B)$.

תשובה: ב) $p(A)=p(B)=O$, $q(A)=\begin{pmatrix}7 & 12\\ 18 & 25\end{pmatrix}$, $q(B)=\begin{pmatrix}-11 & -24\\ 18 & 43\end{pmatrix}$

20. נתון: A ו- B מטריצות דומות . הוכח את המשפט: לכל מספר טבעי n מטריצות A^n , B^n דומות.

21. א. למטריצות A ו- B של השאלה 17 חשב $\det A$ ו- $\det B$.

ב. הוכח את הטענה: $B\sim A \;\Leftarrow\; \det A=\det B$.

ג. האם הטענה ההפוכה היא נכונה? אם לא הבא דוגמה נגדית.

תשובה: ג) הטענה ההפוכה אינה נכונה, לדוגמה: $A=\begin{pmatrix}2 & 9\\ 0 & 10\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix}$

22. אילו מהטענות הבאות הן נכונות? נמק את תשובותיך.

א. אם מטריצות A ו- B דומות ואחת מהן רגולרית (הפיכה), אז גם המטריצה השניה היא רגולרית.

ב. אם מטריצות A ו- B רגולריות, אז הן דומות.

ג. אם מטריצות A ו- B דומות ואחת מהן רגולרית, אז מטריצות A^{-1} ו- B^{-1} גם דומות.

ד. אם מטריצות A ו- B דומות, אז מטריצות A^n ו- B^n גם דומות לכל מספר $n\in N$.

ה. (*) אם קיים מספר $n \in N$ כך שמטריצות A^n ו-B^n דומות, אז מטריצות A ו-B גם דומות.

תשובה: א) נכונה ב) אינה נכונה ג) נכונה ד) נכונה

ה) אינה נכונה, לדוגמה, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

23. ידוע כי לכל שתי מטריצות K ו-L ריבועיות מתקיים $\mathrm{tr}(KL) = \mathrm{tr}(LK)$.

א. בהסתמך על העובדה זו הוכח את הטענה: $A \sim B \;\Rightarrow\; \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.

ב. הבא דוגמה של שתי מטריצות A ו-B בעלות אותה עקבה ($\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$), אך אינן דומות.

תשובה: לדוגמה: ב) $A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

24. (*) הוכח את הטענה הבאה: אם מטריצות A ו-B דומות , אז לכל מספר ממשי λ מטריצות $(A - \alpha I)$ ו- $(B - \alpha I)$ דומות .