תרגול 2 – אינפי 3

הגדרה

קוביה סגורה ב$\mathbb{R}^n$

$$k(\bar{a},\alpha)=(a_1-\alpha,a_1+\alpha)\times\ldots.\times(a_n-\alpha,a_n+\alpha)$$

משפט

תהי $\bar{a}\in\mathbb{R}^n$.

כל כדור פתוח שמרכזו $\bar{a}$ מכיל קוביה פתוחה שמרכזה $\bar{a}$. כלומר

$$\forall\bar{\alpha}>0\exists\hat{\alpha}>0:k(\bar{a},\hat{\alpha})\subseteq B(\bar{a},\bar{\alpha})$$

הוכחה

תחילה ב$\mathbb{R}^2$, קל לראות שמתקיים.

נראה שאכן מתקיים ב$\mathbb{R}^n$, תהי $\bar{x}$ נקודה כלשהי בקוביה ה-n ממדית, $k(\bar{a},\alpha)$, ע"פ ההגדרה של קוביה קוביה פתוחה

$$x\in\left(a_1-\frac{\alpha}{\sqrt{n}},a_1+\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)\times\ldots.\times\left(a_n-\frac{\alpha}{\sqrt{n}},a_n+\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)$$

בפרט לכל i מתקיים $a_i-\frac{\alpha}{\sqrt{n}}<x_i<a_i+\frac{\alpha}{\sqrt{n}}$ ולכן $|x_i-a_i|<\frac{\alpha}{\sqrt{n}}$ ולכן

$$\left|\left|\bar{x}-\bar{a}\right|\right|=\sqrt{(x_1-a_!)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2}<\sqrt{n\left(\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)^2}=\alpha$$

הערה

באופן דומה אפשר להראות כי בכל קוביה n ממדית מוכל כדור.

סדרות ב$\mathbb{R}^n$

הגדרה

תהי $\overline{a_k}$ סדרת נקודות ב$\mathbb{R}^n$, ותהי $\bar{a}$ נקודה ב$\mathbb{R}^n$, אומרים כי $\bar{a}_k$ מתכנסת ל$\bar{a}$, אם

$$\forall\epsilon>0\exists N\in\mathbb{N}\forall k\geq N:\left|\left|a_k-\bar{a}\right|\right|<\epsilon$$

דוגמא

$$a_n=\left(1,\frac{1}{n},\sin\frac{1}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}(0,0,0)$$

הערה

באופן דומה $\mathbb{R}$

1) הגבול הוא יחיד
2) $\bar{a}_n\to\bar{a}$ אם"ם בכל סביבה של $\bar{a}$ נמצאים כמעט כל איברי הסדרה.

טענה

אם $\bar{a}_k$ סדרה ב$\mathbb{R}^n$ ותהי $\bar{a}$ נקודה ב$\mathbb{R}^n$. הסדרה מתכנסת ל$\bar{a}$ $\Leftrightarrow$ סדרת המספרים הממשיים $\left|\left|a_k-a\right|\right|$ מתכנסת ל-0.

הוכחה

קל להראות ע"פ הגדרה כי $a_n \to a \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall k \geq N : ||\bar{a}_n - \bar{a}|| < \epsilon$, זה בדיוק כמו לדרוש $||a_k - a|| \to \infty$

תרגיל

הראה כי הסדרה $a_n = (1, -1, (-1)^n)$ אינה מתכנסת.

הוכחה

נניח בשלילה שהסדרה מתכנסת, מתקיים $||a_n - a|| = \sqrt{(1-a_1)^2 + (1+a_2)^2 + ((-1)^n - a_3)^2}$ וע"פ משפט זה שואף ל-0, ובגלל שכל הערכים חיוביים כל רכיב חייב להתכנס ולכן $(-1)^n - a_3 \to 0 \Rightarrow (-1)^n \to a_3$ בסתירה.

משפט

הסדרה a^n מתכנסת ל$\bar{a}$ אם"ם לכל $1 \leq i \leq n$ סדרת המספרים a_i מתכנסים ל$\bar{a}_i$.

נקודה פנימית וחיצונית ושפה ב$\mathbb{R}^n$

1) $\bar{x}$ נקראת נקודה פנימית של A אם קיימת סביבה של $\bar{x}$ המוכלת כולה בA.
2) $\bar{x}$ נקראת נקודה חיצונית, אם קיימת סביבה של $\bar{x}$ המוכלת כולה בA^C
3) $\bar{x}$ נקראת נקודת שפה של A אם כל סביבה של $\bar{x}$ מכילה נקודות מA וגם מA^C.

נסיק כי קבוצת הנקודות הפנימיות של A תקרא הפנים של A, וכן הלאה....

טענה

תהי $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$. כל נקודה $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ המקיימת $||\bar{x} - \bar{a}|| < \alpha$, היא נקודה פנימית של הכדור הפתוח $B(\bar{a}, \alpha)$.

הוכחה

תהי $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. ברור שמתקיים $||\bar{x} - \bar{a}|| < \alpha$ ונראה שקיים כדור פתוח $B(\bar{x}, \delta)$ כך שלכל $\bar{x}$ שנבחר $B(\bar{x}, \delta) \subset B(\bar{a}, \alpha)$

תהי $\bar{y}$ נקודה כלשהי ב$B(\bar{x}, \delta)$, מתקיים $||y - a|| = ||y - x + x - a|| \leq ||y - x|| + ||x - a|| < \delta + ||x - a||$

יש לדרוש כי $\delta + ||x - a|| < \alpha$ וזה יקרא כאשר $\delta = \alpha - ||x - a||$.

ולכן הראינו שכל נקודה הנמצאת בכדור שרדיוסו δ נמצאת בכדור α.

הערה

$$A \subseteq \mathbb{R}^n$$

1) כתוצאה נגדיר כי A היא קבוצה פתוחה אם כל נקודה בA היא נקודה פנימית של A.
2) קבוצה נקראת סגורה אם הקבוצה המשלימה A^c פתוחה.

הגדרה (נקודת הצטברות)

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהי $\overline{x_0} \in \mathbb{R}^n$. $\bar{x}_0$ נקראת נקודת הצטברות אם קיימת בA סדרה של נקודות שונות מ$\overline{x_0}$ המתכנסות ל$\overline{x_0}$.

הקבוצה A איחוד עם כל נקודות ההצטברות שלה נקראת הסגור של A.

לדוגמא

1) $A = [1,2]$, נראה כי $x_0 = 1$ היא נקודת הצטברות, עבור הסדרה $x_k = 1 + \frac{1}{k}$, $A \ni x_k \neq 1$, $x_k \to 1$
2) $A = (1,2]$ גם כאן $x = 1$ היא נקודת הצטברות, ע"פ סעיף קודם.

נסמן את אוסף נקודות ההצטברות $\lim[0,1] = \lim(0,1] = [0,1]$

3) $A = [0,1] \cup \{3\}$.
נראה כי $x = 3$ אינה נקודת הצטברות, נניח בשלילה שהיא כן, אז קיימת סדרה של נקודות $3 \neq x_n \to 3$ מתחייב כי $x_n \in A$ ולכן $x_n \in [0,1]$ אך כאן לא יתכן כי $x = 3$ היא נקודת ההצטברות של הקטע $[0,1]$.
4) $A = \{0\}, limA = \phi$

הגדרה
תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהי $\bar{x} \in A$. $\bar{x}$ נקראת נקודה מבודדת של A אם היא איננה נקודת הצטברות.

משפט
תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A היא קבוצה סגורה אם"ם כל נקודות ההצטברות של A נמצאות בA.

הוכח/הפרך
לכל שתי קבוצות A, B מתקיים $limA \cap limB \subseteq \lim(A \cap B)$

הפרכה

$$A = \left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right) : n \in \mathbb{N}\right\}, B = \left\{\left(-\frac{1}{n}, 0\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$$
$$limA = limB = \{(0,0)\}$$
$$\lim(A \cap B) = \lim \phi = \phi$$

פונקציות מ$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

נאמר שהפונקציה f שואפת לL כאשר $\bar{x}_n$ שואף ל$\bar{x}$ אם

$$\forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0\ \forall 0 < \left||x - x_0|\right| < \delta : \left||f(x_0) - L|\right| < \epsilon$$

תרגיל
תהי $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ כך ש$f(x,y) = xy^{\frac{1}{2}}$, הוכח כי $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

פתרון

$$\left||(x,y) - (0,0)|\right| < \delta \Rightarrow \left||x,y|\right| < \delta$$
$$|x| = \left||x|\right| < \delta$$
$$|y| = \left||y|\right| < \delta$$
$$\left||f(x,y) - 0|\right| = \left|\left|xy^{\frac{1}{2}}\right|\right| = |x|\left|y^{\frac{1}{2}}\right| \le \delta^{\frac{3}{2}} < \epsilon$$

נבחר $\delta = \epsilon^{\frac{2}{3}}$ ונקבל את הדרוש.

הערה
ת.ה של הפונקציה $\ln(x^2 + y^2 - 1)$ הוא $x^2 + y^2 > 1$, כלומר אלו כל הנקודות החיצוניות למעגל היחידה.

דוגמא
הראה כי העקומה $16x^2 + 9y^2 - 6xy - 5y + 1 = 0$ היא אליפסה.

פתרון

תזכורת: משוואת אליפסה היא $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

$$16x^2 + 9y^2 - 6xy - 5y = -1$$
$$16(x^2 - 4x) + 9(y^2 - 6y) = -1$$
$$16(x-2)^2 + 9(y-3)^2 = -1 + 16 * 4 + 9 * 9 = 144$$
$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$$