

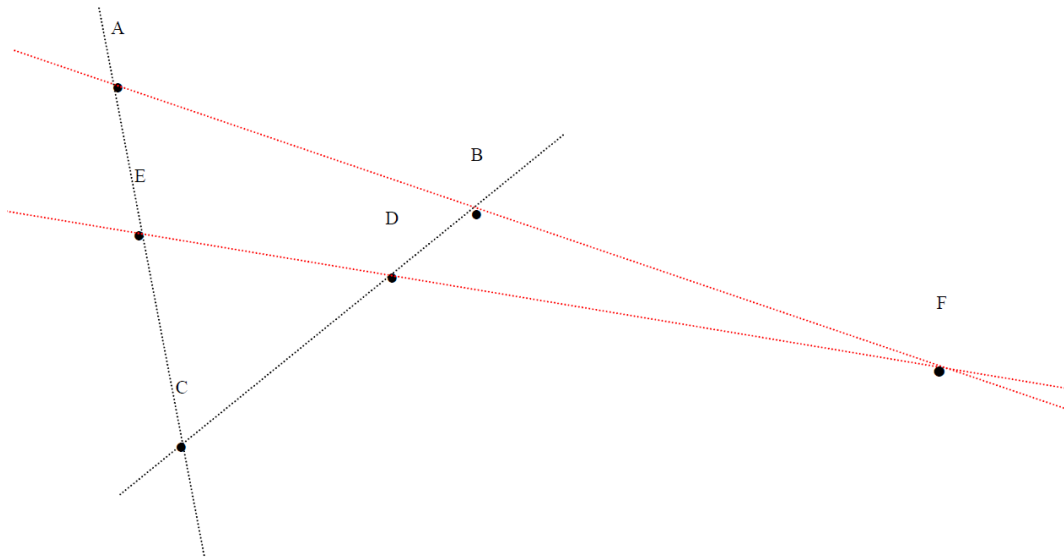
1.

ציירו ציורים מתאימים לטענות הבאות, נסחו את הטענה הדואלית וציירו גם עבורה:

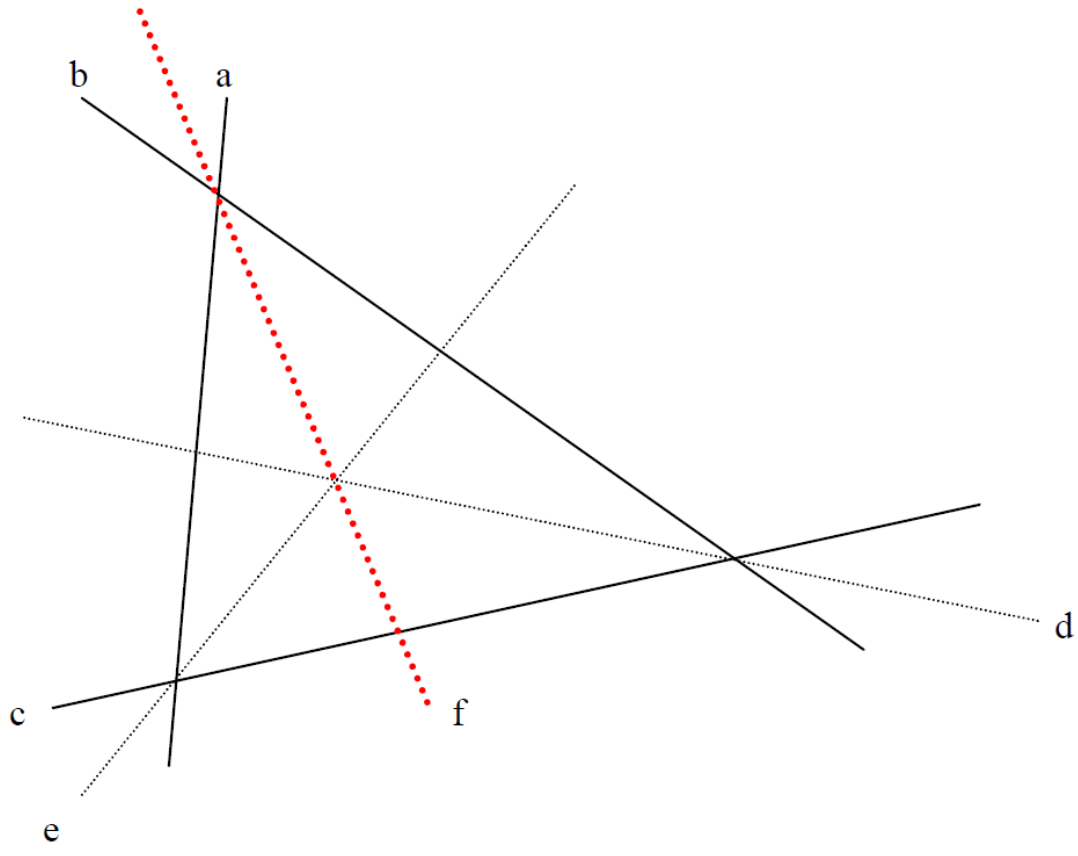
א. C, B, A נקודות שונות לא קולינאריות, D, E נקודות שונות כך ש C, B, D קולינאריות ו- A, E, C קולינאריות. אז יש נקודה F כך ש- F, B, A קולינאריות ו- F, E, D קולינאריות

ב. (משפט פפוס הזעיר): R_1, R_2, R_3 הן נקודות שונות על ישר r , S_1, S_2, S_3 נקודות שונות על ישר s ו- R_1S_1, R_2S_2, R_3S_3 קונקורנטיות בנקודה P . אז הנקודות $R_2S_3 \cap R_3S_2, R_1S_3 \cap R_3S_1, R_1S_2 \cap R_2S_1$ נמצאות על ישר p שהוא קונקורנטי עם r ו- s .

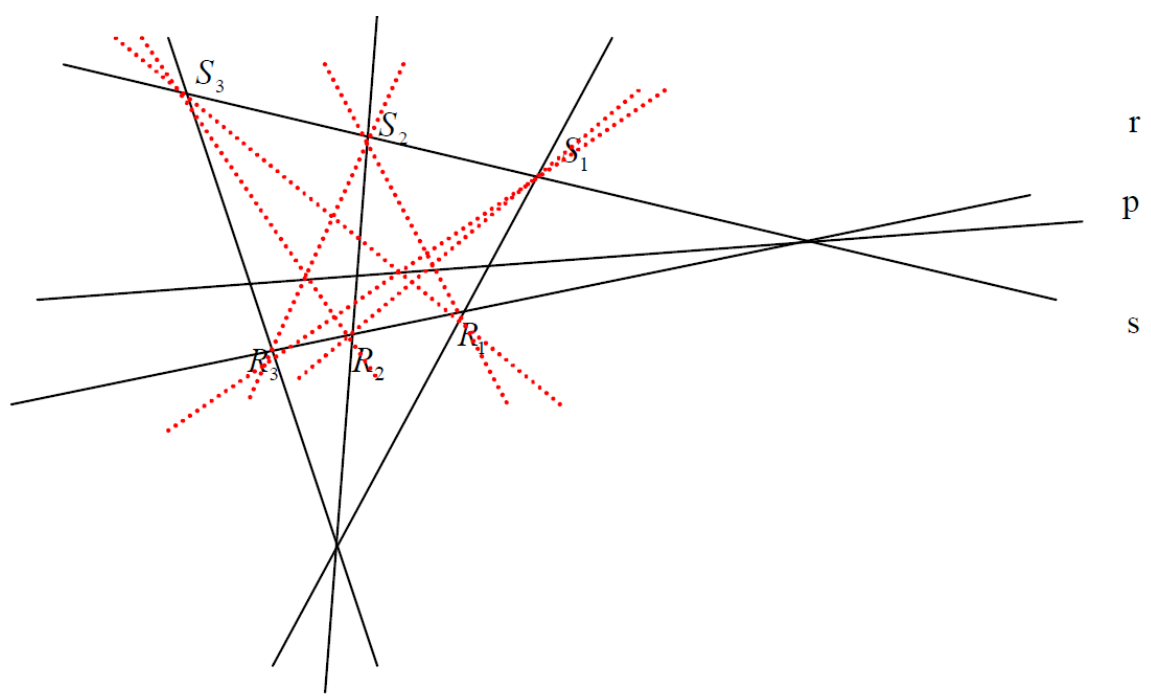
פתרון: א1.



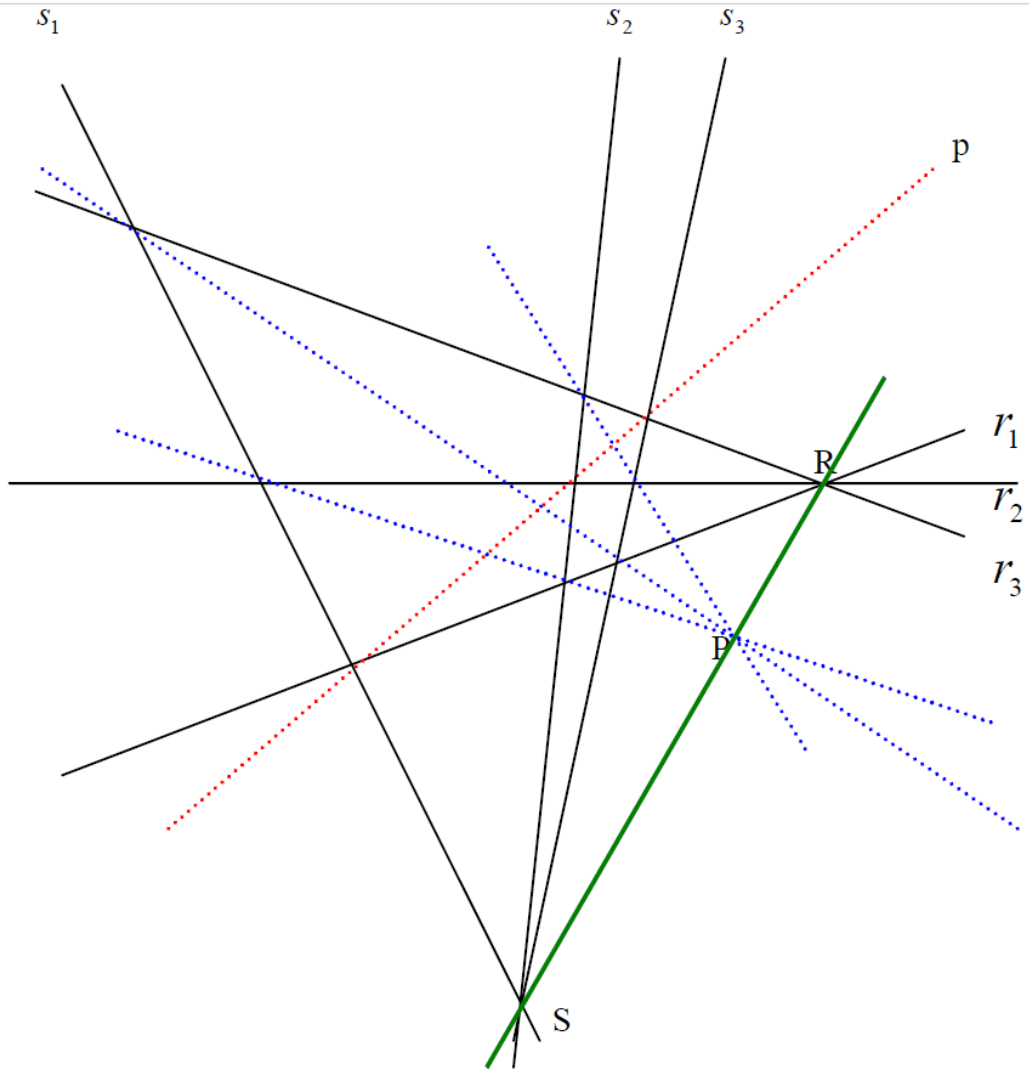
דואלי: a, b, c ישרים שונים לא קונקורנטיים. d, e ישרים שונים כך ש- c, b, d קונקורנטיים ו- a, e, c קונקורנטיים. אז יש ישר f כך ש- a, b, f קונקורנטיים ו- f, e, d קונקורנטיים.



פתרון 1.ב



דואלי: r_1, r_2, r_3 הם ישרים שונים הנפגשים בנקודה R, s_1, s_2, s_3 הם ישרים שונים הנפגשים בנקודה S ו- $r_1 \cap s_1, r_2 \cap s_2, r_3 \cap s_3$ קולינאריות בישר p. אז הישרים $r_2 \cap s_3 - r_3 \cap s_2, r_1 \cap s_3 - r_3 \cap s_1, r_1 \cap s_2 - r_2 \cap s_1$ קונקורנטיים בנקודה P שהיא קולינארית עם R ו-S.



פתרון 2

מספר העל מישורים ב- FP^{11} הוא כמספר הנקודות בו. לכן

(א) עבור $F=Z_5$ מספר על-מישורים ב- FP^4 : $5^4 + 5^3 + 5^2 + 5 + 1 = 781$.

(ב) עבור $F=Z_7$ מספר על-מישורים ב- FP^3 : $7^3 + 7^2 + 7 + 1 = 400$.

פתרון 3

3. יהי $F = Z_2$ שדה בעל שני איברים.

(א) כמה ישרים יש ב- FP^2 ? כמה נקודות יש על כל ישר?

$2^2 + 2 + 1 = 7$ ישרים ונקודות, עבור $z \neq 0$ נקודות במישור האפייני, עבור $z = 0$ נקודות באינסוף. $2+1$ נקודות על כל ישר ($2+1$ ישרים דרך כל נקודה).

(ב) מהן הנקודות על הישר באינסוף?

השיפועים האפשריים: $0, 1 \sim -1, \infty$.

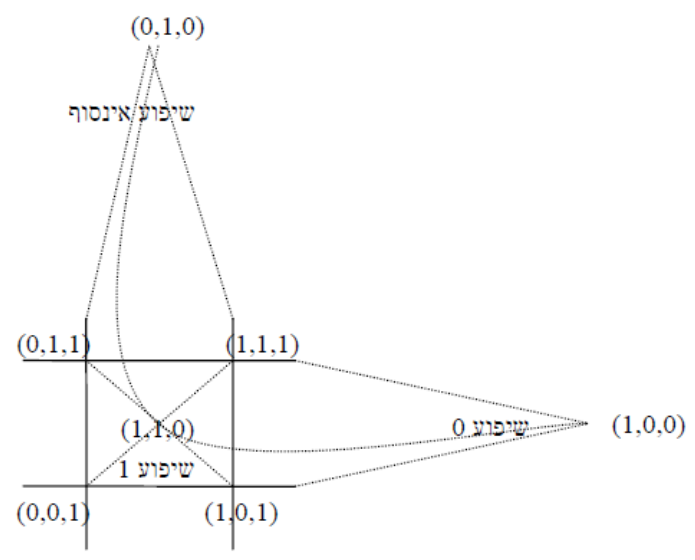
עבור $0: (1,0,0)$, עבור $1 (= -1): (1,1,0)$, עבור אינסוף: $(0,1,0)$.

(ג) רשמו את כל הנקודות ב- FP^2 .

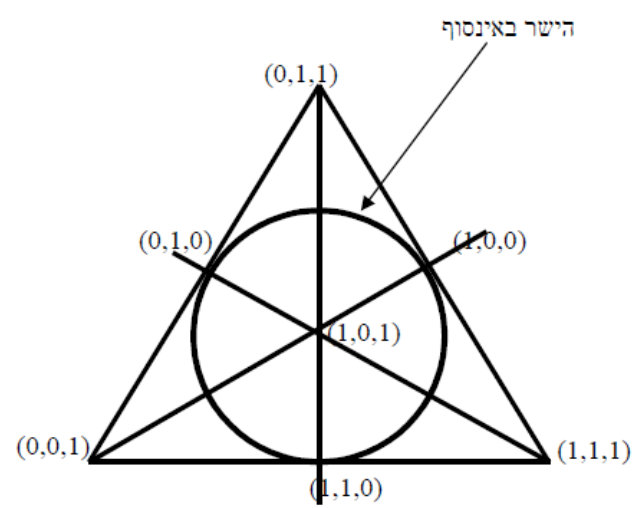
במישור האפייני $(0,0,1), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,1) \rightarrow$

באינסוף $(1,0,0), (1,1,0), (0,1,0) \rightarrow$

(ד)



אז:



4. האם קיימת העתקה פרויקטיבית מהישר הפרויקטיבי RP^1 לעצמו השולחת את

8, 2, 4, 1

ל-

0, -0.8, 1, 2

בהתאמה? אם כן, מיצאו אותה מפורשות ומיצאו את הנקודות הקבועות שלה.

פתרון:

מתקיים

$$R(8,2,4,1) = \frac{-2}{7}$$

וכן

$$R(0, -0.8, 1, 2) = \frac{7}{9}$$

אלה שני ערכים שונים לכן אין העתקה פרויקטיבית המעבירה נקודות אלה לנקודות אלה בהתאמה, כי העתקה פרויקטיבית שומרת על היחס הכפול.

5. האם קיימת העתקה פרויקטיבית מהישר הפרויקטיבי RP^1 לעצמו השולחת את

$$8, 2, 4, 1$$

ל-

$$0, -0.8, 1, 2$$

לאו דווקא בהתאמה? אם כן, מיצאו אותה מפורשות ומיצאו את הנקודות הקבועות שלה.

פתרון:

כפי שראינו בשאלה 4,

$$R(8,2,4,1) = \frac{-2}{7}$$

$$R(0, -0.8, 1, 2) = \frac{7}{9}$$

נסמן

$$r = \frac{-2}{7}$$

מתקיים

$$1 - r = \frac{9}{7}$$

$$1/(1 - r) = \frac{7}{9}$$

כלומר כן יש העתקה פרויקטיבית השולחת את הנקודות זו לזו.
כדי למצוא אותה קודם כן נבין שהנקודות 1, 4, 2, 8 צריכות להשלח בהתאמה לנקודות
-0.8, 1, 0, 2, כך מתקבל אותו היחס הכפול בהתאמה.

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ מהצורה מוביוס}$$

מתקיים

$$\frac{8a + b}{8c + d} = 2$$

כלומר

$$8a + b - 16c - 2d = 0$$

מתקיים

$$\frac{2a + b}{2c + d} = 0$$

כלומר

$$2a + b = 0$$

מתקיים

$$\frac{4a + b}{4c + d} = 1$$

כלומר

$$4a + b - 4c - d = 0$$

מתקיים

$$\frac{a + b}{c + d} = -0.8$$

כלומר

$$a + b + 0.8c + 0.8d = 0$$

נכניס 4 משוואות אלה למטריצה ונדרג. מקבלים פתרון כללי:

$$a = t$$

$$b = -2t$$

$$c = \frac{t}{4}$$

$$d = t$$

$$f(x) = \frac{tx-2t}{\frac{t}{4}x+t} = \frac{x-2}{\frac{x}{4}+1} = \frac{4x-8}{x+4} \text{ ההעתקה היא}$$

אין לה נקודות קבועות כי למשוואה $x = \frac{4x-8}{x+4}$ אין פתרונות ממשיים.