תזכורת (התפלגויות רציפות)

1. התפלגות אחידה:

$$X\sim U[a,b]$$

2. התפלגות אקספוננציאלית:

$$X\sim Exp(\lambda)$$

זמן ההמתנה לתופעה חסרת זכרון.

2.1 התפלגות גאמה:

$$X\sim\Gamma(n,\lambda)$$

$$\Gamma(n,\lambda)=\sum_{n}Exp(\lambda)$$

מספר התופעות האקספוננציאליות $Exp(\lambda)$ בפרק זמן קבוע T מתפלג $Poi\left(\frac{T}{\lambda}\right)$.

3. התפלגות נורמלית: נלמד כעת.

ההתפלגות הנורמלית

בעיה

$$I:=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=?$$

לפונקציה $e^{-\frac{x^2}{2}}$ אין קדומה אלמנטרית, לכן הנוסחה היסודית (ניוטון לייבניץ) לא תעזור כאן.

פתרון

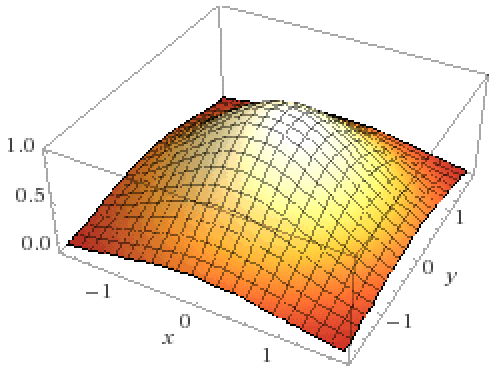
נעבור לפונקציה בשני משתנים:

$$I^2=\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right)^2$$

$$I^2=\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy\right)$$

$$I^2=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\right)dy$$

המחשה

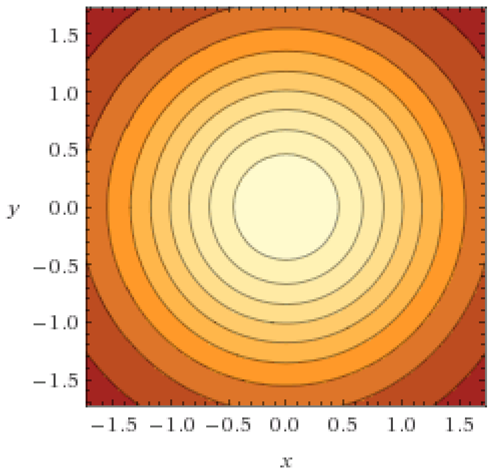


המשימה היא לחשב את הנפח הכלוא בין מישור ה – xy לבין המשטח שגובהו בנקודה (x,y) הוא:

$$e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

נחלק את המישור למעגלים קונצנטריים (בעלי נקודת מרכז משותפת, שהיא ראשית הצירים).

המחשה



מהו הנפח מעל הטבעת שבין רדיוסים R ו - $R' := R + \Delta R$?

הגוף הזה הוא טבעת גלילית.

שטח הבסיס של הטבעת:

$$\pi \cdot R'^2 - \pi \cdot R^2 = 2\pi \cdot R \cdot \Delta R + \pi \cdot \Delta R^2$$

גובה הטבעת:

בין $e^{-\frac{R^2}{2}}$ לבין $e^{-\frac{R'^2}{2}}$, כלומר בערך: $e^{-\frac{R^2}{2}}$.

לכן:

$$\sum_{\text{כל הטבעות}} 2\pi\cdot R\cdot \Delta R\cdot e^{-\frac{R^2}{2}} \le I^2 \le \sum_{\text{כל הטבעות}} (2\pi\cdot R\cdot \Delta R+\pi\cdot\Delta R^2)\cdot e^{-\frac{(R+\Delta R)^2}{2}}$$

עבור $\Delta R\to 0$, נקבל:

$$I^2=\int_0^\infty 2\pi\cdot R\cdot e^{-\frac{R^2}{2}}\,dR=\left[-2\pi\cdot e^{-\frac{R^2}{2}}\right]_0^\infty=0-(-2\pi)=2\pi$$

לכן:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=1$$

■

הגדרה

משתנה מקרי Z מתפלג נורמלית סטנדרטית, $Z\sim N(0,1)$, אם פונקציית הצפיפות שלו היא:

$$f_Z(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$$

עובדה

אם ל X – יש צפיפות f_X, אז הצפיפות של $a\cdot X+b$ היא:

$$f_{a\cdot X+b}(a\cdot t+b)=f_X(t)\cdot\frac{1}{a}$$

הוכחה

$$P(\gamma_1<a\cdot X+b<\gamma_2)=P\left(\frac{\gamma_1-b}{a}<X<\frac{\gamma_2-b}{a}\right)$$

$$P(\gamma_1<a\cdot X+b<\gamma_2)=\int_{\frac{\gamma_1-b}{a}}^{\frac{\gamma_2-b}{a}} f_X(t)\,dt$$

נציב:

$$s\coloneqq a\cdot t+b$$

לכן:

$$t = \frac{s-b}{a}$$

$$dt = \frac{1}{a}\, ds$$

$$\frac{\gamma_1 - b}{a} \le t \le \frac{\gamma_2 - b}{a}$$

$$\gamma_1 \le s \le \gamma_2$$

לכן:

$$P(\gamma_1 < a \cdot X + b < \gamma_2) = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{s-b}{a} \cdot \frac{1}{a}\, ds$$

$$P(\gamma_1 < a \cdot X + b < \gamma_2) = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f_{a \cdot X + b}(s)\, ds$$

■

מסקנה

אם $Z \sim N(0,1)$, אז ל - $X = \sigma \cdot Z + \mu$ יש צפיפות:

$$f_X(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

משתנה עם הצפיפות הזו נקרא משתנה נורמלי:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

מסקנה

אם X נורמלי, אז גם $a \cdot X + b$ נורמלי.

חישוב התוחלת והשונות

$$Z \sim N(0,1)$$

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot t \, dt$$

עפ"י אנטי סימטריות:

$$E(Z) = 0$$

$$E(Z^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot t^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{t}^{:=g} \cdot \overbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot t\right)}^{:=f'} dt$$

ניעזר באינטגרציה בחלקים:

$$E(Z^2) = 1$$

לכן:

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 1 - 0 = 1$$

כעת, ניקח:

$$X = \sigma \cdot Z + \mu$$

כלומר, משתנה $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

$$E(X) = E(\sigma \cdot Z + \mu) = \sigma \cdot E(Z) + \mu = \mu$$

$$Var(X) = Var(\sigma \cdot Z + \mu) = Var(\sigma \cdot Z) = \sigma^2 \cdot Var(Z) = \sigma^2$$

■

מסקנה

משתנה נורמלי, בהינתן שהוא נורמלי, נקבע לפי התוחלת והשונות שלו.

התפלגות χ^2 (חי בריבוע)

התפלגות של $Z_1^2 + \cdots + Z_n^2$, כאשר $Z_i \sim N(0,1)$ ובלתי תלויים, נקראת התפלגות χ^2 עם n דרגות חופש.

מתקיים:

$$f_{\chi_n^2}(t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot 2^{\frac{n}{2}}} \cdot t^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{t}{2}}$$

כאשר:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} \cdot e^{-x}\, dx$$

הערה: תכונה של פונקציית גאמה:

$$\Gamma(z+1) = \Gamma(z) \cdot z$$

$$\Downarrow$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

נקבל:

$$E(\chi_n^2) = n \quad ; \quad Var(\chi_n^2) = 2n$$

התפלגות t

ההתפלגות של $X = \frac{Z}{\sqrt{U \cdot n}}$ כאשר $Z \sim N(0,1)$ ו - $U \sim \chi_n^2$ ובלתי תלויים, נקראת התפלגות t עם n דרגות חופש.

מתקיים:

$$f_X(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi \cdot n} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

נקבל:

$$E(X) = 0$$

התפלגות F

ההתפלגות של $Y = \frac{\frac{U}{n}}{\frac{V}{m}}$, כאשר $U \sim \chi_n^2$ ו - $V \sim \chi_n^2$ ובלתי תלויים, נקראת התפלגות F עם n, m דרגות חופש.

מתקיים:

$$f_Y(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\cdot\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}}\cdot t^{\frac{n}{2}-1}\cdot\left(1+\frac{n}{m}\cdot t\right)^{-\frac{n+m}{2}}$$

■