פתרון תרגיל 2 מד"ר סמסטר קיץ תשע"ו

15 ביולי 2016

1. נשתמש בכל תרגיל בטריק המתאים.

(א) נציב $z = \frac{y}{x}$. לכן: $y = zx$, ולכן: $y' = z + xz'$. נציב זאת במשוואה המקורית:

$$y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x} \Longrightarrow z + xz' = z + \tan z$$

לכן:

$$x\frac{dz}{dx} = \tan z$$

כלומר:

$$\frac{dz}{\tan z} = \frac{dx}{x}$$

נבצע אינטגרציה על שני האגפים ונקבל:

$$\int \frac{\cos z}{\sin z} dz = \int \frac{dx}{x}$$

כלומר:

$$\ln|\sin z| = \ln|x| + C$$

אחרי שנסדר את הקבוע (נסמן $C = \ln C$ ואז נשתמש בחוקי הלוגריתם):

$$\ln|\sin z| = \ln|Cx|$$

לפיכך, $\sin z = Cx$. נחזור ל-y ונקבל:

$$\sin\frac{y}{x} = Cx$$

ולכן: $y = x \arcsin Cx$.

כמו כן, נשים לב שחילקנו ב-$\tan z$. מה קורה כאשר $\tan z = 0$? נקבל ש: $z = \pi k$, כלומר $y = \pi k x$ לכל $k \in \mathbb{Z}$ (אלו פתרונות סינגולאריים).

(ב) נחלק את המונה והמכנה ב$-x^3$ ונקבל:

$$y' = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}{\left(\frac{y}{x}\right)\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}$$

כמו בסעיף הקודם, נציב $z = \frac{y}{x}$. לכן $y' = z + xz'$, ואם נציב זאת חזרה במשוואה נקבל:

$$z + xz' = \frac{1+z^2\sqrt{1+z^2}}{z\sqrt{1+z^2}}$$

כלומר:

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{1+z^2\sqrt{1+z^2}}{z\sqrt{1+z^2}} - z = \frac{1+z^2\sqrt{1+z^2}-z^2\sqrt{1+z^2}}{z\sqrt{1+z^2}} = \frac{1}{z\sqrt{1+z^2}}$$

ולכן:

$$z\sqrt{1+z^2}dz = \frac{dx}{x}$$

נבצע אינטרגציה על שני האגפים ונקבל:

$$\int z\sqrt{1+z^2}dz = \int \frac{dx}{x}$$

את האינטגרל הימני אפשר לפתור בקלות באמצעות ההצבה: $1+z^2 = t$. $2zdz = dt$, ונקבל:

$$\int z\sqrt{1+z^2}dz = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\left(1+z^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

אם כן:

$$\frac{1}{3}\left(1+z^2\right)^{\frac{3}{2}} == \ln|Cx|$$

לכן:

$$1+z^2 = (3\ln|Cx|)^{\frac{2}{3}}$$

נחזור חזרה ל$-y$:

$$\frac{y^2}{x^2} = (3\ln|Cx|)^{\frac{2}{3}} - 1$$

ולכן:

$$y = \pm\sqrt{x^2\left((3\ln|Cx|)^{\frac{2}{3}}-1\right)}$$

(ג) במקרה שלנו:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

לכן, נבצע הצבה: $x = u + \alpha, y = v + \beta$. במצב כזה, $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$, ונקבל:

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + v + \alpha + \beta - 2}{u - v + \alpha - \beta + 4}$$

נבחר α, β כך שיתקיים:

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 2 = 0 \\ \alpha - \beta + 4 = 0 \end{cases}$$

כלומר $\alpha = -1, \beta = 3$. כעת, המשוואה היא:

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + v}{u - v} = -\frac{1 + \frac{v}{u}}{1 - \frac{v}{u}}$$

נציב $z = \frac{v}{u}$. $\frac{dv}{du} = z + uz'$, ולכן:

$$z + uz' = -\frac{1 + z}{1 - z}$$

לפיכך:

$$u\frac{dz}{du} = \frac{1 + z}{1 - z} - z = -\frac{1 + z^2}{1 - z}$$

לכן:

$$-\frac{1 - z}{1 + z^2} dz = \frac{du}{u}$$

נבצע אינטגרציה על שני האגפים:

$$-\int \frac{1 - z}{1 + z^2} dz = \int \frac{du}{u}$$

את האינטגרל מימין נחלק לשני אינטגרלים:

$$-\int \frac{1 - z}{1 + z^2} dz = -\int \frac{1}{1 + z^2} dz + \int \frac{z}{1 + z^2} dz = -\arctan z + \frac{1}{2} \ln\left(1 + z^2\right)$$

כלומר:

$$-\arctan z + \frac{1}{2} \ln\left(1 + z^2\right) = \ln|Cu|$$

נחזור ל־v:

$$-\arctan \frac{v}{u} + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2\right) = \ln|Cu|$$

נחזור ל־y, x:

$$-\arctan\frac{y-3}{x+1}+\frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y-3}{x+1}\right)^2\right)=\ln\left|C\left(x+1\right)\right|$$

2. אלו משוואות ברנולי.

(א) נחלק ב־y^4 ונקבל:

$$\frac{y'}{y^4}=-\frac{2}{xy^3}+x^2$$

נציב: $z=y^{-3}$. נקבל: $z'=-3y^{-4}y'$, ולכן המשוואה תהיה:

$$-\frac{z'}{3}=-\frac{2z}{x}+x^2$$

כלומר:

$$z'-\frac{6z}{x}=-3x^2$$

נפתור את המשוואה ההומוגנית:

$$z'-\frac{6z}{x}=0$$

נקבל:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{6z}{x}$$

לכן:

$$\frac{dz}{z}=6\frac{dx}{x}$$

נבצע אינטגרציה ונקבל:

$$\int\frac{dz}{z}=6\int\frac{dx}{x}$$

אם כן:

$$\ln|z|=6\ln|Cx|=\ln\left|\left(Cx\right)^6\right|$$

לכן: $z=\left(Cx\right)^6=Cx^6$.

כעת, נמצא פתרון פרטי למשוואה הלא־הומוגנית באמצעות וריאציית המקדם:

$$z=C\left(x\right)\cdot x^6$$

נקבל $z' = C'\left(x\right)\cdot x^6 + 6C\left(x\right)\cdot x^5$. נציב במשוואה:

$$C'\left(x\right)\cdot x^6 + 6C\left(x\right)\cdot x^5 - \frac{6C'\left(x\right)\cdot x^6}{x} = -3x^2$$

לכן:

$$C'\left(x\right) = -\frac{3}{x^4}$$

כלומר: $C\left(x\right) = x^{-3}$, ולכן הפתרון הפרטי הוא $z = x^3$.
בסך הכל, הפתרון הוא: $z = x^3 + Cx^6$. נחזור חזרה ל־y:

$$y^{-3} = x^3 + Cx^6$$

ולכן:

$$y = \left(\frac{1}{x^3 + Cx^6}\right)^{\frac{1}{3}}$$

(ב) נכפיל ב־y^2 ונקבל:

$$y^2y' = y^3 + \sin 2x$$

נציב $z = y^3$. אם כן, $z' = 3y^2y'$. לכן:

$$\frac{z'}{3} = z + \sin 2x$$

כלומר:

$$z' - 3z = 3\sin 2x$$

נפתור את המשוואה ההומוגנית:

$$z' - 3z = 0$$

כלומר $z' = 3z$, וגם בלי להפריד משתנים קל לראות שהפתרון הוא מהצורה $z = Ce^{3x}$.
נמצא פתרון פרטי למשוואה הלא־הומוגנית באמצעות וריאציית המקדם:

$$z = C\left(x\right)e^{3x}$$

לכן $z' = C'\left(x\right)e^{3x} + 3C\left(x\right)e^{3x}$. נציב במשוואה:

$$C'\left(x\right)e^{3x} + 3C\left(x\right)e^{3x} - 3C\left(x\right)e^{3x} = 3\sin 2x$$

כלומר:

$$C'\left(x\right)=3e^{-3x}\sin 2x\Longrightarrow C\left(x\right)=\int 3e^{-3x}\sin 2xdx$$

את האינטגרל נמצא באמצעות שימוש כפול באינטגרציה בחלקים:

$$\left\{\begin{array}{cc} u=\sin 2x & v'=3e^{-3x} \\ u'=2\cos 2x & v=-e^{-3x} \end{array}\right\}$$

ולכן:

$$\int 3e^{-3x}\sin 2xdx=-e^{-3x}\sin 2x+\int e^{-3x}2\cos 2xdx$$

ושוב:

$$\left\{\begin{array}{cc} u=2\cos 2x & v'=e^{-3x} \\ u'=-4\sin 2x & v=\frac{-e^{-3x}}{3} \end{array}\right\}$$

ולכן:

$$\int 3e^{-3x}\sin 2xdx=-e^{-3x}\sin 2x-\frac{e^{-3x}2\cos 2x}{3}-\int\frac{e^{-3x}4\sin 2x}{3}dx$$

כלומר:

$$4\frac{1}{3}\cdot\int e^{-3x}\sin 2xdx=-e^{-3x}\sin 2x-\frac{e^{-3x}2\cos 2x}{3}$$

ולכן:

$$C\left(x\right)=3\cdot\int e^{-3x}\sin 2xdx=-\frac{9e^{-3x}\sin 2x+6e^{-3x}\cos 2x}{13}$$

אם כן, הפתרון הפרטי הוא: $z=C\left(x\right)e^{3x}=-\frac{9\sin 2x+6\cos 2x}{13}$.
בסך הכל, הפתרון הוא: $z=-\frac{9\sin 2x+6\cos 2x}{13}+Ce^{3x}$. נחזור חזרה ל־$y$:

$$y^3=-\frac{9\sin 2x+6\cos 2x}{13}+Ce^{3x}$$

כלומר:

$$y=\left(-\frac{9\sin 2x+6\cos 2x}{13}+Ce^{3x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

וזהו הפתרון.

3. זו משוואת ריקטי:

$$y' = \frac{1}{2\cos x}y^2 + 0\cdot y + \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x}{2\cos x}$$

ידוע ש: $y_0 = \sin x$. פתרון. לכן, נציב: $y = \sin x + z$, כלומר $y' = \cos x + z'$ ונקבל:

$$\cos x + z' = \frac{1}{2\cos x}\left(\sin x + z\right)^2 + \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x}{2\cos x}$$

אם כן:

$$\cos x + z' = \frac{\sin^2 x + 2z\sin x + z^2}{2\cos x} + \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x}{2\cos x} = z\tan x + \frac{1}{2\cos x}z^2 + \cos x$$

ולכן:

$$z' = z\tan x + \frac{1}{2\cos x}z^2$$

זו משוואת ברנולי. נחלק ב־z^2:

$$\frac{z'}{z^2} = \frac{\tan x}{z} + \frac{1}{2\cos x}$$

נציב: $u = \frac{1}{z}$. לכן, $u' = -\frac{z'}{z^2}$. נקבל:

$$-u' = u\tan x + \frac{1}{2\cos x}$$

נפתור את המשוואה ההומוגנית:

$$\frac{du}{dx} = -u\tan x$$

אם כן:

$$\frac{du}{u} = -\tan x dx$$

נבצע אינטגרציה על שני האגפים:

$$\int \frac{du}{u} = -\int \tan x dx$$

נקבל:

$$\ln|u| = \ln|C\cos x|$$

ולכן: $u = C\cos x$. נחפש פתרון פרטי למערכת הלא־הומוגנית באמצעות וריאציית המקדם:

$$u = C\left(x\right)\cos x$$

לכן $u' = C'(x)\cos x - C(x)\sin x$. נציב זאת במשוואה:

$$C'(x)\cos x - C(x)\sin x + C(x)\cos x\tan x + \frac{1}{2\cos x} = 0$$

לפיכך:

$$C'(x) = -\frac{1}{2\cos^2 x}$$

ולכן:

$$C(x) = -\frac{1}{2}\tan x$$

אם כן, הפתרון הפרטי הוא $-\frac{1}{2}\tan x\cos x = -\frac{1}{2}\sin x$.
בסך הכל, הפתרון הוא: $u = C\cos x - \frac{1}{2}\sin x$. נחזור ל-$z$:

$$z = \frac{1}{C\cos x - \frac{1}{2}\sin x}$$

נחזור ל-y:

$$y = \sin x + \frac{1}{C\cos x - \frac{1}{2}\sin x}$$

4. זו משוואת ברנולי.

(א) נחלק ב-U^2 ונקבל:

$$\frac{U'}{U^2} = \frac{a}{U} - b$$

נציב $z = \frac{1}{U}$. $z' = -\frac{U'}{U^2}$, ולכן:

$$-z' = az - b$$

נפתור את המשוואה ההומוגנית:

$$\frac{dz}{dt} = -az$$

ולכן:

$$\frac{dz}{z} = -adt$$

נבצע אינטגרציה:

$$\ln|z| = -at + C$$

כלומר: $z=Ce^{-at}$. נמצא פתרון למשוואה הלא־הומוגנית באמצעות וריאציית המקדם:

$$z=C\left(t\right)e^{-at}$$

לכן $z'=C'\left(t\right)e^{-at}-aC\left(t\right)e^{-at}$. נציב במשוואה:

$$C'\left(t\right)e^{-at}-aC\left(t\right)e^{-at}+aC\left(t\right)e^{-at}-b=0$$

כלומר: $C'\left(t\right)=be^{at}$ ולכן $C\left(t\right)=\frac{b}{a}e^{at}$. לכן הפתרון הפרטי הוא $z=\frac{b}{a}$.
בסך הכל הפתרון הוא $z=\frac{b}{a}+Ce^{-at}$. נחזור ל־U ונקבל:

$$U=\frac{1}{\frac{b}{a}+Ce^{-at}}=\frac{a}{b+Ce^{-at}}$$

(ב) מהסעיף הקודם קל לראות שמתקיים:

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}U\left(t\right)=\frac{a}{b}$$

(ג) מהתנאים נקבל 3 משוואות:

$$\begin{cases}\frac{a}{b}=10000\\ \frac{a}{b+C}=2000\\ \frac{a}{b+Ce^{-a}}=4000\end{cases}$$

נפתור את המשוואות ונקבל:

$$a\approx0.98,b\approx0.000098,C\approx3.92$$

הפתרון הפרטי המתאים יהיה:

$$U\left(t\right)\approx\frac{0.98}{0.000098+3.92e^{-0.98t}}$$

5. כל אחת מהפונקציות y_1,y_2,y_3,y_4 היא פתרון של משוואת ריקטי:

$$\begin{cases}y_1'=a\left(x\right)y_1^2+b\left(x\right)y_1+c\left(x\right)\\ y_2'=a\left(x\right)y_2^2+b\left(x\right)y_2+c\left(x\right)\\ y_3'=a\left(x\right)y_3^2+b\left(x\right)y_3+c\left(x\right)\\ y_4'=a\left(x\right)y_4^2+b\left(x\right)y_4+c\left(x\right)\end{cases}$$

לכן:

$$\begin{cases} y_1' - y_3' = a(x)\left(y_1^2 - y_3^2\right) + b(x)(y_1 - y_3) = (a(x)(y_1 + y_3) + b(x))(y_1 - y_3) \\ y_2' - y_4' = a(x)\left(y_2^2 - y_4^2\right) + b(x)(y_2 - y_4) = (a(x)(y_2 + y_4) + b(x))(y_2 - y_4) \end{cases}$$

לפיכך:

$$\begin{cases} \frac{y_1' - y_3'}{y_1 - y_3} = a(x)(y_1 + y_3) + b(x) \\ \frac{y_2' - y_4'}{y_2 - y_4} = a(x)(y_2 + y_4) + b(x) \end{cases}$$

את הביטויים $\frac{y_4' - y_1'}{y_4 - y_1}, \frac{y_3' - y_2'}{y_3 - y_2}$ אפשר לכתוב באופן דומה.
כעת, נסתכל על $\ln q$. לפי חוקי הלוגירתם:

$$\ln q = \ln(y_1 - y_3) + \ln(y_2 - y_4) - \ln(y_3 - y_2) - \ln(y_4 - y_1)$$

נגזור את הביטוי:

$$(\ln q)' = \frac{y_1' - y_3'}{y_1 - y_3} + \frac{y_2' - y_4'}{y_2 - y_4} - \frac{y_3' - y_2'}{y_3 - y_2} - \frac{y_4' - y_1'}{y_4 - y_1} =$$

לפי המשוואות שלנו:

$$\begin{gathered} = a(x)(y_1 + y_3) + b(x) + a(x)(y_2 + y_4) + b(x) \\ -a(x)(y_3 + y_3) - b(x) - a(x)(y_4 + y_1) - b(x) = 0 \end{gathered}$$

לכן $(\ln q)' = 0$ ולכן $\ln q$ קבוע, וגם q קבוע.
כעת, נניח ש-y_1, y_2, y_3 פתרונות שונים, ו-y פתרון אחר. כפי שראינו, הביטוי:

$$q = \frac{(y_3 - y_1)(y - y_2)}{(y_3 - y_2)(y - y_1)}$$

הוא קבוע. לכן:

$$q(y_3 - y_2)(y - y_1) = (y_3 - y_1)(y - y_2)$$

ולכן:

$$qy(y_3 - y_2) - qy_1(y_3 - y_2) = y(y_3 - y_1) - y_2(y_3 - y_1)$$

נעביר אגפים ונחלק:

$$y = \frac{y_2(y_3 - y_1) - qy_1(y_3 - y_2)}{(y_3 - y_1) - q(y_3 - y_2)}$$

ואם נסמן $C = -q$ נקבל את ההצגה הדרושה.
כאשר $C = 0$, נקבל:

$$y = \frac{y_2(y_3 - y_1)}{(y_3 - y_1)} = y_2$$

כאשר $C=1$ נקבל:

$$y=\frac{y_2\left(y_3-y_1\right)-y_1\left(y_3-y_2\right)}{\left(y_3-y_1\right)-\left(y_3-y_2\right)}=\frac{y_2y_3-y_1y_3}{y_2-y_1}=y_3$$

כאשר $C\longrightarrow\infty$ נקבל:

$$y=\lim_{C\longrightarrow\infty}\frac{y_2\left(y_3-y_1\right)+Cy_1\left(y_3-y_2\right)}{\left(y_3-y_1\right)+C\left(y_3-y_2\right)}=y_1$$

6. הוורונסקיאן מתאפס בכל הקטע, כלומר:

$$0=W_{y_1,y_2}\left(x\right)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1y_2'-y_2y_1'$$

מכיוון ש$-0 \neq y_1$, אפשר לחלק ב$-y_1^2$:

$$0=\frac{y_1y_2'-y_2y_1'}{y_1^2}=\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'$$

ולכן: $\frac{y_2}{y_1}=C$, ולכן: $y_2=Cy_1$, ופירוש הדבר שהפונקציות תלויות ליניארית.

7. איך נראות הנגזרות?

$$y_i^{(k)}=a_i^ke^{a_ix}$$

לכן:

$$W=\begin{vmatrix} e^{a_1x} & e^{a_2x} & \dots & e^{a_nx} \\ a_1e^{a_1x} & a_2e^{a_2x} & \dots & a_ne^{a_nx} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1}e^{a_1x} & a_2^{n-1}e^{a_2x} & \dots & a_n^{n-1}e^{a_nx} \end{vmatrix}$$

כפל שורה/עמודה מכפיל את הדטרמיננטה באותו האיבר, כלומר:

$$W=e^{a_1x}\cdot e^{a_2x}\cdot\ldots e^{a_nx}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

זו הדטרמיננטה של מטריצת ונדרמונדה, ואכן:

$$W=W\left(e^{a_1x},e^{a_2x},\ldots,e^{a_nx}\right)=\prod_{k=1}^{n}e^{a_kx}\cdot\prod_{1\leq i<j\leq n}\left(a_j-a_i\right)$$

8. עבור α הנגזרות של $y = x^\alpha$ הן:

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}, y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, y''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$$

ומכיוון שהפונקציה מקיימת את המשוואה:

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^\alpha + a\alpha(\alpha-1)x^\alpha + b\alpha x^\alpha + cx^\alpha = 0$$

ולכן:

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + a\alpha(\alpha-1) + b\alpha + c = 0$$

כלומר:

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) = -a\alpha(\alpha-1) - b\alpha - c$$

וקל לראות שאם נבחר:

$$a = (\alpha-2), b = (\alpha-1)(\alpha-2), c = -3\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$$

המשוואה אכן תתקיים.

הדבר נכון גם עבור β ועבור γ. לכן, אפשר לרשום:

$$\begin{pmatrix} -\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) & \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) & \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \\ -\beta(\beta-1)(\beta-2) & \beta(\beta-1)(\beta-2) & \beta(\beta-1)(\beta-2) \\ -\gamma(\gamma-1)(\gamma-2) & \gamma(\gamma-1)(\gamma-2) & \gamma(\gamma-1)(\gamma-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^\alpha \\ x^\beta \\ x^\gamma \end{pmatrix} = \vec{0}$$

על מנת שהפונקציות $x^\alpha, x^\beta, x^\gamma$ תהיינה בת"ל על שורות המטריצה להיות בת"ל, כלומר α, β, γ שונים זה מזה.

9. נשתמש בוריאציית המקדמים.

(א) המשוואה ההומוגנית הקשורה היא:

$$y'' - \frac{2y'}{x} + \frac{2y}{x} = 0$$

נחשב את הוורונסקיאן:

$$W = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2 \neq 0$$

ואכן בת"ל. נחשב את W_1, W_2:

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ x\ln x & 2x \end{vmatrix} = -x^3 \ln x$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & x\ln x \end{vmatrix} = x^2 \ln x$$

כעת, נחשב את C_1, C_2:

$$C_1 = \int \frac{W_1}{W} dx + K_1 = \int -x \ln x dx + K_1$$

את האינטגרל נחשב באמצעות אינטגרציה בחלקים:

$$\left\{ \begin{array}{cc} u = \ln x & v' = -x \\ u' = \frac{1}{x} & v = -\frac{x^2}{2} \end{array} \right\}$$

נקבל:

$$C_1 = K_1 - \frac{x^2}{2} \ln x + \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = K_1 - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4}$$

באופן דומה:

$$C_2 = \int \frac{W_2}{W} dx + K_2 = \int \ln x dx + K_2$$

גם את האינטגרל הזה נחשב בחלקים:

$$\left\{ \begin{array}{cc} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{array} \right\}$$

נקבל:

$$C_2 = K_2 + x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = K_2 + x \ln x - x$$

לכן, הפתרון הוא:

$$y = \left(K_1 - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} \right) x + \left(K_2 + x \ln x - x \right) x^2$$

(ב) המשוואה ההומוגנית הקשורה היא:

$$y'' - \left(2x + \frac{1}{x} \right) y' = 0$$

נחשב את הוורונסקיאן:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & e^{x^2} \\ 0 & 2xe^{x^2} \end{vmatrix} = 2xe^{x^2} \neq 0$$

ואכן בת"ל. נחשב את W_1, W_2:

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{x^2} \\ x^4 e^{x^2} & 2xe^{x^2} \end{vmatrix} = -x^4 e^{2x^2}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^4 e^{x^2} \end{vmatrix} = x^4 e^{x^2}$$

כעת, נחשב את C_1, C_2:

$$C_1 = \int \frac{W_1}{W} dx + K_1 = -\frac{1}{2} \int x^3 e^{x^2} dx + K_1$$

את האינטגרל אפשר לחשב באמצעות ההצבה: $t = x^2$, $2xdx = dt$. נקבל:

$$-\frac{1}{2} \int x^3 e^{x^2} dx = -\frac{1}{4} \int te^t dt$$

נבצע אינטגרציה בחלקים:

$$\begin{Bmatrix} u = t & v' = e^t \\ u' = 1 & v = e^t \end{Bmatrix}$$

נקבל:

$$-\frac{1}{4} \left(te^t - \int e^t dt \right) = -\frac{1}{4} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{4} e^{x^2}$$

כלומר:

$$C_1 = -\frac{1}{4} x^2 e^{x^2} + -\frac{1}{4} e^{x^2} + K_1$$

באופן דומה:

$$C_2 = \int \frac{W_2}{W} dx + K_2 = \frac{1}{2} \int x^3 dx + K_2 = \frac{x^4}{8} + K_2$$

ולכן הפתרון הוא:

$$y = -\frac{1}{4} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{4} e^{x^2} + K_1 + \left(\frac{x^4}{8} + K_2 \right) e^{x^2}$$