אנליזה למורים - תרגיל 4

תזכורת:

1) סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל מתכנסת

2) סדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלרע מתכנסת

3) סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת

שאלה 1

תהי a_n סדרה נתונה ע"י נוסחאות נסיגה $a_{n+1}=\sqrt{a_n+c}$ כאשר $a_1,c>0$. הוכח שהסדרה מתכנסת וחשב את גבולה.

הדרכה:

אם קיים גבול לסדרה, נסמנו ב־L, אזי מתקיים $L=\sqrt{L+c}$ **(למה?)**, מצאו שני פתרונות למשוואה: $L_1=?$, $L_2=?$. קודם כל נפסול את אחד פתרונות וההסבר לכך הוא שכל איברי הסדרה הם חיוביים ולכן הגבול חייב להיות אי שלילי **כאן צריך לתת הסבר למה בהכרח אחד הפתרונות לא מתאים. נסמן את הפתרון ב־L.**

נחלק למקרים:

* אם $L>a_1$ נוכיח באינדוקציה שהסדרה מונוטונית יורדת וכיוון שהיא חסומה מלרע ע"י אפס היא היא מתכנסת.

(תכתבו את פרטי ההוכחה)

* $L<a_1$ נוכיח באינדוקציה שהסדרה מונוטונית עולה כמו כן, נוכיח באינדוקציה שהיא חסומה מלעיל ע"י L, ולכן מתכנסת.

(תכתבו את פרטי ההוכחה)

* אם $a_1=L$, קל לוודא כי הסדרה היא קבועה L

(נמקו למה)

פירוט של הוכחה באינדוקציה עבור מקרה $a_1 < L$:

נוכיח באינדוקציה שהסדרה היא מונוטונית עולה.

* בסיס אינדוקציה : עלינו להוכיח ש־$a_2 > a_1$, כלומר עלינו להוכיח את אי שוויון הבא:(?).נמצא את כל הפתרונות עבור לאי שוויון עבור המשתנה a_1, ונגלה שהוא מתקיים במקרה שלנו כיוון ש־$0 < a_1 < L$.

* הנחת האינדוקציה: כעת יהי n, עבורו $a_n < a_{n+1}$.

עלינו להוכיח כי $a_{n+1} < a_{n+2}$, כלומר, עלינו להוכיח כי(?) , אך זה נובע בקלות לפי הנחת האינדוקציה **(לתת הסבר)**

נותר לנו להוכיח כי הסדרה חסומה מלעיל ע"י L, גם את זה נוכיח באינדוקציה:

* בסיס האינדוקציה: טריביאלי, כיוון שאנו עוסקים במקרה בו $a_1 < L$.

* הנחת האינדוקציה: נניח נכונות עבור n כלומר $a_n < L$.

נרצה להוכיח את אי שוויון הבא: $a_{n+1} < L$. אי שוויון זה נכון אם ורק אם : $a_n + c < \frac{\left(\sqrt{4c+1}\right)^2}{4}$ אם ורק אם **(להמשיך את ההוכחה)** $= \frac{\left(\sqrt{4c+1}+1\right)^2}{4} - c > a_n$.

סה"כ לכל ערכי $c > 0$ ולכל ערכי $a_1 > 0$ מתקיים כי $lim_{n\to\infty} a_n = (?)$.

שאלה 2

תהי הסדרה a_n הנתונה ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ כאשר $a_1 > 0$, הוכיחו כי $lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

הדרכה:

דבר ראשון, נראה כי הסדרה היא מונוטונית עולה $a_{n+1} - a_n = (?)$

כעת נניח שהסדרה חסומה אזי מתכנסת לגבול ממשי L. כיוון ש: $lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$, נקבל את המשוואה הבאה $L + \frac{1}{L} = L$ **(איזו סתירה מתקבלת כאן)**

שאלה 3

בדקו את התכנסות הסדרה : $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}$.

שאלה דומה מאוד עשינו בכיתה

שאלה 4

היה $0 < c < 1$. נגדיר סדרה ע"י תנאי ההתחלה $a_1 = c$ ונוסחת הנסיגה $a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}$. הוכיחו כי הסדרה מתכנסת ומצאו את גבולה.

הדרכה:

ראשית רואים שהסדרה חסומה מלרע ע"י **(?)** . כעט נוכיח באינדוקציה כי הסדרה מונוטונית יורדת כלומר $a_n - a_{n-1} \leq 0$.

* בסיס האינדוקציה: עבור $n = 2$ מתקיים $a_2 - a_1 = \frac{c}{2} + \frac{a_1^2}{2} - a_1 = (?)$.

* החנחת האינדוקציה נניח נכונות עבור n

נוכיח את נכונות הטענה עבור $n+1$: $a_{n+1} - a_n = (?)$.

הוכחנו שהסדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלרע ולכן היא מתכנסת. לכן קיים $L \in \mathbb{R}$ כך ש-L $a_n \to L$, אזי

$$L = lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty} a_{n+1} = (?)$$

קיבלנו משוואה ריבועית: **(?)** ולכן $L_{1,2} = (?)$. אחד פתרונות נפסל **(איזה מהם?)** משום שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים ש-$a_n \leq 1$, ולכן הגבול חייב להיות **(?)**