# חשבון אינפיניטסימלי 1 (88132) | מבחן תשפ"ב מועד א'

הצעת פתרון | יונתן סמידוברסקי

### שאלה 1

**הוכיחו את משפט ערך הביניים, בגירסתו הבאה: תהי $f$ פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$, המקיימת $f(a) > f(b)$. אזי לכל מספר ממשי $d$ המקיים $f(a) > d > f(b)$ יש מספר ממשי $c$ המקיים $a < c < b$, כך ש $f(c) = d$.**

<u>הוכחה</u>

נגדיר $c := sup\{x \in [a,b] | f(x) \geq d\}$,

הוא קיים היות והסדרה חסומה (ע"י $b$) ולא ריקה (למשל $f(a) \geq d$)

כעת ניקח $c_n \in C$, סדרה מהקבוצה המקיימת $c_n \to c$, מרציפות מתקיים $d \leq f(c_n) \to f(c)$,

קיבלנו מאי שיוויון חלש של גבולות כי $d \leq f(c)$, כלומר קטן או שווה.

נניח בשלילה $d < f(c)$, כעת היות ו$c < b$ קיימת סדרה $b_n \in [a,b]$ כך ש$b_n \to c^+$

אבל $f(b_n) \to f(c) > d$ ולכן לבסוף $f(b_n) \geq d$ בסתירה לכך ש$c$ הסופרימום.

**שאלה 2**

**הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:**

**א.** יהיו $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ו $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות המקיימות $x_n \cdot y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. **אזי בהכרח** $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ **או** $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. (10 נקודות)

**ב.** קיימת פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך שלכל נקודה $a\in\mathbb{R}$ מתקיים: הפונקציה $f$ אינה רציפה בנקודה $a$, אך הפונקציה $f^2$ (המוגדרת $f^2(x):=(f(x))^2$ לכל $x$) רציפה בנקודה $a$. (11 נקודות)

**ג.** קיימת פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך שלכל נקודה $a\in\mathbb{R}$ מתקיים: הפונקציה $f$ אינה גזירה בנקודה $a$, אך הפונקציה $f^2$ גזירה בנקודה $a$. (11 נקודות)

## (א)

**הפרכה**

לוקחים $x_n := \begin{cases} 1 & even \\ 0 & odd \end{cases}$, $y_n := \begin{cases} 0 & even \\ 1 & odd \end{cases}$

מכפלתן מקיימת $x_n \cdot y_n = 0$, אבל ברור ששתי הסדרות אינן מתכנסות ובפרט לאפס,

למשל כי יש להן שני גבולות חלקיים שונים.

## (ב)

**הוכחה**

ניקח $f(x) := \begin{cases} 1 & x\in\mathbb{Q} \\ -1 & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$

ראינו בהרצאה שפונקציה זו (גרסה שונה לפונקציית דיריכלה), אינה רציפה בכל הישר הממשי

אבל $(f(x))^2 = 1$ וברור כי רציפה בכולו.

## (ג)

**הוכחה**

ניקח את אותה הפונקציה, ידוע כי פונקציה גזירה היא רציפה

מהיותה של הפונקציה לא רציפה נסיק שהיא גם לא גזירה, למרות ש$(f(x))^2 = 1$ ונגזרתה היא 0.

## שאלה 3

**חשבו את הגבולות הבאים:**

**א.** $\lim_{x\to 0}\frac{7^x-5^x}{x}$. **(10 נקודות)**

**ב.** $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{7}{x})^{5x}$. **(11 נקודות)**

**ג.** $\lim_{x\to-\infty}(7^x+5^x)^{\frac{1}{x}}$. **(11 נקודות)**

### (א)

נפעיל לופיטל $(\frac{0}{0})$

$$lim_{x\to 0}\frac{7^x-5^x}{x}=lim_{x\to 0}\frac{7^x log(7)-5^x log(5)}{1}=log(7)-log(5)=log(\frac{7}{5})$$

### (ב)

$$lim_{x\to\infty}(1-\frac{7}{x})^{5x}=lim_{x\to\infty}\left((1+\frac{(-7)}{x})^x\right)^5=e^{-7\cdot 5}=e^{-35}$$

### (ג)

$$lim_{x\to-\infty}(7^x+5^x)^{\frac{1}{x}}=lim_{x\to\infty}(\frac{1}{7^x}+\frac{1}{5^x})^{-\frac{1}{x}}=lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[x]{(\frac{1}{7^x}+\frac{1}{5^x})}}$$

כעת ניעזר בסנדוויץ'

$$\frac{1}{\sqrt[x]{(\frac{2}{5^x})}}\le\frac{1}{\sqrt[x]{(\frac{1}{7^x}+\frac{1}{5^x})}}\le\frac{1}{\sqrt[x]{\frac{1}{5^x}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[x]{\frac{1}{5^x}}}=5\to 5,\ \frac{1}{\sqrt[x]{\frac{2}{5^x}}}=\frac{5}{\sqrt[x]{2}}\to 5$$

ולכן מסנדביץ' סיימנו, הגבול הוא 5.

## שאלה 4

**א.** **הוכיחו את האי־שיוויון:** $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$ **לכל** $x, y \in \mathbb{R}$.

**ב.** **האם הטור**

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\log_7 n}{2n^3 - 1}$$

**מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי, או מתבדר? הוכיחו!**

## (א)

**<u>הוכחה</u>** נגדיר את הפונקציות $f(x) := sin(x), g(x) := x$

כעת, לכל $x, y \in \mathbb{R}$

אם $x = y$, שני צידי אי השיוויון שווים לאפס, וסיימנו

אחרת $x \neq y$, נניח בלי הגבלת הכלליות $y > x$

נניח בשלילה $|sinx - siny| > |x - y|$

כלומר $\frac{sinx - siny}{x-y} > 1$ או $\frac{sinx-siny}{x-y} < -1$

נראה כי זה לא יכול לקרות.

נסתכל על הסביבה $(x, y)$, הן שתיהן רציפות כי אלמנטריות וקל להראות שגם גזירות בכל $\mathbb{R}$ (בפרט בתחומים המתאימים)

אז קיימת $x < c < y$ כך ש

$$cos(c) = \frac{cos(c)}{1} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{sinx - siny}{x - y}$$

אבל מהתחום של $cos$ קיבלנו בעצם

$$-1 \le |\frac{sin(x) - sin(y)}{x - y}| \le 1$$

בסתירה.

**(ב)**

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{log_7(n)}{2n^3-1}$$

ננסה התכנסות בהחלט, נסתכל על זנב טור הערכים המוחלטים כדי שהטור הבא יהיה חיובי

$$\sum_{n=7}^{\infty}\frac{log_7(n)}{2n^3-1}\leq\sum_{n=7}^{\infty}\frac{n}{2n^3-1}\leq\sum_{n=7}^{\infty}\frac{n}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$$

**מתכנס בהחלט** וסיימנו.