

# תרגיל בית 1

8 במרץ 2018

חשב את האסימפטוטות של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = |x| e^{-|x-1|} \quad (1)$$

**פתרון:**

קל לראות שהפונקציה היא:

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot e^{1-x} & x > 1 \\ x \cdot e^{x-1} & 0 \leq x \leq 1 \\ -x \cdot e^{x-1} & x < 0 \end{cases}$$

הפונקציה היא רציפה בכל מקום ולכן אין לה אסימפטוטות אנכיות.

אסימפטוטות אופקיות:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^{1-x} = 0$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \cdot e^{x-1} = 0$$

ולכן יש אסימפטוטה אנכית אחת  $y = 0$

אין אסימפטוטות משופעות.

$$f(x) = x - 2\arctan(x) \quad (2)$$

**פתרון:**

הפונקציה רציפה בכל נקודה ולכן אין לה אסימפטוטות אנכיות

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - 2\arctan(x)) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 2\arctan(x)) = -\infty$$

ולכן אין אסימפטוטות אופקיות

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2\arctan(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \frac{2\arctan(x)}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} x - 2\arctan(x) - x = \pi$$

ולכן אסימפטוטה משופעת ב $-\infty$  היא  $y = x + \pi$

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2\arctan(x)}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 2\arctan(x) - x = -\pi$$

ולכן האסימפטוטה משופעת ב $-\infty$  היא  $y = 1 - \pi$

$$f(x) = x^x \quad (3)$$

**פתרון:**

$$f(x) = x^x = e^{x \ln(x)}$$

קודם כל נשים לב ש- $e^{x \ln(x)}$  הגדרה של  $f$  הוא  $x > 0$  ולכן הנקודה שחשודה לאסימפטוטה אנכית היא  $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln(x)} = 1 \neq \pm \infty$$

אסימפטוטה אופכית:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln(x)} = \infty$$

אין אסימפטוטה אופכית ב- $\infty$

ברור שאין אסימפטוטה אופכית ב- $-\infty$  כי הפונקציה לא מוגדרת כאשר  $x < 0$

אסימפטוטות משופעות:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x \ln(x)}}{x} = \infty$$

ולכן אין אסימפטוטה משופעת ב- $\infty$

ברור שאין אסימפטוטה משופעת ב- $-\infty$

$$f(x) = x + \sin(x) \quad (4)$$

**פתרון:**

הפונקציה רציפה בכל הממשיים ולכן אין אסימפטוטות אנכיות

אסימפטוטות אופקיות:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sin(2x)) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sin(2x)) = -\infty$$

ולכן אין אסימפטוטות אופקיות

אסימפטוטות משופעות:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin(2x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x + \sin(2x) - x = \text{not exist}$$

ולכן אין אסימפטוטה משופעת ב- $\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sin(2x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sin(2x) - x = \text{not exist}$$

ולכן אין אסימפטוטה משופעת ב- $-\infty$

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{|x|} + \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad (5)$$

**פתרון:**

נשים לב שהפונקציה היא למעשה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} + \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x > 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x < 0 \end{cases}$$

נקודת אי הגדרה כאן היא  $x = 0$  והיא גם הנקודה היחידה שחשודה לאסימפטוטה

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} + \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \infty$$

ולכן בנקודה  $x = 0$  עוברת אסימפטוטה אנכית

אסימפטוטות אופקיות

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} + \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

ולכן  $y = 1$  היא אסימפטוטה אופקית ב- $\infty$

אין אסימפטוטה אופקית ב- $-\infty$

אסימפטוטות משופעות

אין אסימפטוטה משופעת ב- $\infty$  אבל יש אסימפטוטה אופקית

אין אסימפטוטה משופעת ב- $-\infty$  אבל יש אסימפטוטה אופקית

$$f(x) = e^{-x} - \frac{1}{(x-1)^2} \quad (6)$$

**פתרון:**

נקודת אי רציפות היא  $x = 1$ , נבדוק האם יש שם אסימפטוטה אנכית:

$$\lim_{x \rightarrow 1} e^{-x} - \frac{1}{(x-1)^2} = -\infty$$

ולכן ב- $x = 1$  יש אסימפטוטה אנכית

אסימפטוטות אופכיות

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} - \frac{1}{(x-1)^2} = 0$$

ולכן  $y = 0$  היא אסימפטוטה אפקית ב- $\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} - \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

ולכן אין אסימפטוטה אופקית ב- $-\infty$

אסימפטוטות משופעות:

אין אסימפטוטה משופעת ב- $\infty$  אבל יש שם אסימפטוטה אופקית

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x} - \frac{1}{(x-1)^2}}{x} = -\infty$$

ולכן אין אסימפטוטה משופעת ב- $-\infty$