הדר קנר
* אם מצאתם טעויות בקובץ, נא הודיעו לי במייל על מנת שאוכל לתקן
hadara98@gmail.com

אינפי II תיכוניסטים תשפ"א

תרגול #3

תזכורת:

הגדרה: פו' $R(x)$ תקרא רציונלית אם היא מהצורה $R(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}$ כאשר $P(x), Q(x)$ פולי'

אלגוריתם: כדי לעשות אינטגרל נבצע את השלבים הבאים:

(i) אם $\deg(Q(x)) \geq \deg(P(x))$: נבצע חילוק פולי'

(ii) נפרק לשברים חלקיים

(iii) נחשב באינטגרלים מיידיים

כללים של פירוק לשברים חלקיים:

(i) לפרק את המכנה לגורמים אי פריקים

(ii) לכתוב את הביטוי כסכום של המכנים האי פריקים כאשר המונים נקבעים באופן הבא:

(a) גורם אי פריק לינארי מקבל קבוע במונה

(b) גורם אי פריק ריבועי מקבל ביטוי לינארי במונה $(Ax+B)$

גורם אי פריק מדרגה k יקבל פולי' אי פריק מדרגה k-1

(c) גורם אי פריק לינארי בחזקה - $(x-a)^k$ - נפרק לסכום עם כל החזקות עד אליו.

$$\frac{1}{(x-a)^k}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\dots+\frac{K}{(x-a)^k}$$

תרגילים: חשבו את האינטגרלים הבאים

I

$$\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}\,dx$$

נשתמש בחילוק פולי' ע"מ לפרק את המונה לסכום פולי':

$$\begin{array}{r|l} x & \\ \hline x^4-x^3-x-1 & (x^3-x^2) \\ -\ (x^4-x^3) & \\ \hline -x-1 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}\,dx=\int x-\frac{x+1}{x^3-x^2}\,dx \overset{\text{נפרק את המכנה לגורמים אי פריקים}}{=} \int x-\frac{x+1}{x^2(x-1)}\,dx=\frac{x^2}{2}-\int\frac{x+1}{x^2(x-1)}\,dx$$

נפרק לשברים חלקיים:

$$\frac{x+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} \quad / \cdot x^2(x-1)$$

$$x+1 = (Ax+B)(x-1) + Cx^2$$

$$x+1 = Ax^2 + Bx - Ax - B + Cx^2 = x^2(A+C) + x(B-A) + 1(\cancel{E}-B)$$

השוואת מקדמים

$$\Leftarrow \quad \begin{cases} A+C = 0 \\ B-A = 1 \\ -B = 1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(A,B,C) = (-2,-1,2)$$

$$\Rightarrow \int \frac{x+1}{x^2(x-1)}\,dx = \int \frac{-2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1}\,dx = -2\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + C$$

לסה"כ:

$$\int \frac{x^4-x-x-1}{x^3-x^2}\,dx = \frac{x^2}{2} - 2\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + C$$

II (ממבחן) $\int \frac{x^3-2}{x^4-x}\,dx$ (קל)

$$\frac{x^3-2}{x^4-x} = \frac{x^3-2}{x(x^3-1)} = \frac{x^3-2}{x(x-1)(x^2+x+1)}$$

נפרק לשברים חלקיים:

$$\Rightarrow \frac{x^3-2}{x(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} \quad / \cdot x(x+1)(x^2+x+1)$$

$$x^3-2 = A(x^3-1) + B(x^3+x^2+x) + (Cx+D)(x^2-x)$$

$$x^3-2 = Ax^3 - A + Bx^3 + Bx^2 + Bx + Cx^3 + Dx^2 - Cx^2 - Dx$$

השוואת מקדמים

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+C = 1 \\ B+D-C = 0 \\ B+D = 0 \\ -A = -2 \end{cases} \Rightarrow (A,B,C,D) = \left(2, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^3-2}{x^4-x}\,dx = \int \frac{2}{x} - \frac{\frac{1}{3}}{x-1} - \frac{\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}}{x^2+x+1}\,dx = 2\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx -$$

$$- \frac{1}{3}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = 2\ln|x| - \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x^2+x+1| + C$$

הצבה טריגונומטרית

(I) אם מופיעים באינטגרל אחד מהשלושה הבאים:

(i) $\sqrt{a^2-x^2}$: נציב $x := a\sin(\theta)$, $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

(ii) $\sqrt{x^2+a^2}$: נציב $x := a\,tg(\theta)$, $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

(iii) $\sqrt{x^2-a^2}$: נציב $x := \frac{a}{\cos(\theta)}$, $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

דוגמאות

(I) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

מופיע הביטוי $\sqrt{a^2-x^2}$ ולכן נציב

$x := 2\sin\theta$

$dx = 2\cos\theta\, d\theta$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2}} = \int \frac{2\cos\theta\, d\theta}{4\sin^2\theta\sqrt{4-4\sin^2\theta}} = \int \frac{2\cos\theta}{(2\sin\theta)^2 2\cdot\underbrace{\sqrt{1-\sin^2\theta}}_{\cos^2\theta}}\, d\theta =$$

$$= \int \frac{2\cos\theta}{(2\sin\theta)^2 2\cos\theta}\, d\theta = \int \frac{d\theta}{2\sin^2\theta} = -\frac{1}{4}\cot\theta + C$$

נחזור ל-x:

$$\sin\theta = \frac{x}{2} \Rightarrow \sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = \frac{x^2}{4}$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{4-x^2}{4} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}\cot(\theta) + C = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + C = -\frac{1}{4}\frac{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}{\frac{x}{2}} + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{4-x}}{4x} + C$$

(II) $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\, dx$

מופיע $\sqrt{x^2-a^2}$ ולכן נציב

$x := \frac{5}{\cos\theta}$

$$\Rightarrow dx = \frac{-5\cdot(-\sin\theta)}{\cos\theta}\, d\theta = \frac{5}{\cos\theta}\, tg\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\, dx = \int \frac{\sqrt{\frac{25}{\cos^2\theta}-25}}{\cancel{\frac{5}{\cos\theta}}}\cdot\cancel{\frac{5}{\cos\theta}}\, tg\theta\, d\theta = \int 5\sqrt{\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}\cdot tg\theta\, d\theta =$$

$$= 5\int tg^2\theta\, d\theta = 5\int \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta = 5\int \frac{1}{\cos^2\theta} - 1\, d\theta = 5tg\theta - 5\theta + C$$

$$tg^2\theta+1=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{x^2}{25}$$ נחזור ל- x:

$$\Rightarrow tg^2\theta=\frac{x^2-25}{25} \Rightarrow tg\,\theta=\sqrt{\frac{x^2-25}{25}}=\frac{\sqrt{x^2-25}}{5}$$

$$\theta=\cancel{\operatorname{arctg}}\ \arccos\left(\frac{5}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \int\frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx=\sqrt{x^2-25}-5\,\cancel{\operatorname{arctg}}\ \arccos\left(\frac{5}{x}\right)+C$$

III (לבית) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $a>0$

נציב $x=a\,tg\,\theta \Leftarrow$ $dx=\frac{a\,d\theta}{\sin^2\theta}$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{\frac{a\,d\theta}{\sin^2\theta}}{\sqrt{a^2tg^2\theta+a^2}}=\int\frac{\frac{1}{\sin^2\theta}}{\sqrt{\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}}d\theta=$$

$$=\int\frac{\frac{1}{\sin^2\theta}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}}}d\theta=\int\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta=\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}+C=$$

$t=\sin\theta$

$dt=\cos\theta\,d\theta$

$$=-\frac{1}{\sin\theta}+C$$

נחזור ל- x:

$$tg^2\theta=\frac{x^2}{a^2}\Rightarrow tg^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{x^2+a^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta=\frac{a^2}{x^2+a^2}=1-\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta=\frac{x^2}{x^2+a^2}\Rightarrow \sin\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}+C$$

(II) בהינתן $\int \sin^m(x)\cos^n(x)\,dx \quad , \quad m,n\in\mathbb{Z}$

(i) אם m,n שניהם זוגיים: נקטין את מעלת המכפלה ע״י שימוש בזהויות הבאות:

$$(a)\ \sin(2x)=2\sin x\cos x$$

$$(b)\ 2\sin^2 x = 1-\cos 2x$$

$$(c)\ 2\cos^2 x = 1+\cos 2x$$

(ii) אחרת (לפחות אחד מהם אי זוגי):

(a) אם n אי זוגי, נציב $t=\sin x$

(b) אם m אי זוגי, נציב $t=\cos x$

דוגמאות:

(I)
$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \sin^0 \cos^{-1} dx$$

נציב $t=\sin x$ ונשתמש בדיוק $dt=\cos x\,dx$

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x\,dx}{1-\sin^2 x} = \int \frac{dt}{1-t^2} \underset{\text{ע״י רציונלים}}{=} \dots = \frac{1}{2}\left[\int \frac{dt}{1-t} + \int\frac{dt}{1+t}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\ln|1-t| + \ln|1+t|\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C$$

(II)
$$\int \sin^4(x)\cos^4(x)\,dx$$

$$\int \sin^4 x\cos^4 x\,dx = \frac{1}{16}\int (2\sin x\cos x)^4\,dx = \frac{1}{16}\int (\sin 2x)^4\,dx = \frac{1}{16}\int (\sin^2 2x)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{16}\int \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x\right)^2 dx = \frac{1}{16}\int\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 4x\right]dx =$$

$$= \cancel{\frac{1}{16}\int \frac{1}{4}\left(1+\cos^2 4x\right.}\ \frac{1}{16}\int\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}(1+\cos 8x)\right)dx = \dots =$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{x}{4} - \frac{\sin 4x}{8} + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 8x}{16}\right)\right] + C$$

הצבה אוניברסלית:

מטפלים בפו' רציונלית ב- $\sin x$, $\cos x$ (נסמנה $R(\sin x, \cos x)$)

נחשב את האינטגרל $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ בעזרת ההצבה $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

דוגמא

$$\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}$$

נציב $t = tg\frac{x}{2}$

$$\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3} = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^3} + 3} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{\cancel{1+t^2}}{1-t^2+4t+3+3t^2} \cdot \frac{2dt}{\cancel{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{2t^2+4t+4} = \int \frac{dt}{t^2+2t+1} =$$

$$= \ldots = arctg(t+1) + C = arctg\left(tg\left(\frac{x}{2}\right)+1\right) + C$$

הצבת אוילר

מטפלים בפו' עם הביטוי $\sqrt{ax^2+bx+c}$ כאשר ax^2+bx+c פריק,

ומ, β
$$ax^2+bx+c = (k_1x-\alpha)(k_2x-\beta)$$

נציב
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{(k_1x-\alpha)(k_1x-\beta)} = (k_1x-\alpha)t$$

נעלה בריבוע את שני האגפים ונקבל

$$(k_1x-\alpha)(k_2x-\beta) = (k_1x-\alpha)^2t^2$$

$$\Rightarrow (k_2x-\beta) = (k_1x-\alpha)t^2$$

נעביר אגפים ונקבל את x בתלות t:

$$x = \frac{\alpha t^2-\beta}{k_1t^2-k_2}$$

דוגמא

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-2}}$$

$$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$$

נציב

$$\sqrt{(x-1)(x-2)}=(x-1)t$$

לאחר בידוד של x $\Rightarrow x=\frac{t^2+2}{t^2-1} \Rightarrow dx=\frac{-6t\,dt}{(t^2-1)^2}$

בנוסף

$$(x-1)t=\left(\frac{t^2+2}{t^2-1}-1\right)t=\frac{3t}{t^2-1}$$

נציב באינטגרל ונקבל

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-2}}=\int\frac{t^2-1}{t^2+2}\cdot\frac{t^2-1}{3t}\cdot\frac{-6t}{(t^2-1)^2}\,dt=$$

$$=-2\int\frac{dt}{t^2+2}=-\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+C$$

נחלץ את t ונקבל

$$t=\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{(x-1)}=\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$$

$$\Rightarrow\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-2}}=\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-2}}\right)+C$$