נכתב על ידי נועם יערי

תזכורת

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

$r(x)$ שארית אחרי חילוק של $f(x)$ ל - $g(x)$.

אומרים ש - f מתחלק ל - g ללא שארית← $\deg(r) < \deg(g)\ or\ r \equiv 0$

$$f(x) = q(x)(x-a) + r$$

אם $x = a$ הוא שורש של f אזי $f(x)$ מתחלק ל $x - a$ ללא שארית, ז״א

$f(x) = q(x)(x-a)$ (משפט בזו Bezout)

הגדרה

תהי מטריצה $A_{n\times n}$. יהי $\lambda \in \mathbb{F}$. אומרים ש - k_λ היא **ריבוי אלגברי** (ר״א) של ערך עצמי λ אם $(x-\lambda)^{k_\lambda}$ היא החזקה הגבוהה ביותר של $(x-\lambda)$ כך ש $p_A(x)$ מתחלק ל-$(x-\lambda)^{k_\lambda}$ ללא שארית.

(לפי משפט בזו ולפי זה ש $\deg(P_A) = n$: $1 \le k_\lambda \le n$.)

הגדרה

תהי מטריצה $A_{n\times n}$, יהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי של A. מספר $m_\lambda = \dim V_\lambda$ נקרא **הריבוי הגיאומטרי** (ר״ג) של ערך עצמי λ. $1 \le m_\lambda \le n$

דוג׳

1) $A = I_n$. $\lambda = 1$ ערך עצמי יחיד. $p_A(x) = (x-1)^n$.

$k_\lambda = n$

$m_\lambda = n$ כי כל וקטור הוא וקטור עצמי.

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} &p_A(x) = (x-2)(x-3) \\ &\lambda_1 = 2: \quad k_{\lambda_1} = 1, m_{\lambda_1} = 1 \\ &\lambda_2 = 3: \quad k_{\lambda_2} = 1, m_{\lambda_1} = 1 \end{aligned}$$

3)

$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ בלוק ז׳ורדן. $p_A(x) = (x-\lambda)^n$, λ ערך עצמי יחיד.

$k_\lambda = n, m_\lambda = 1$

$$v_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

משפט

לכל ערך עצמי λ של מטריצה A מתקיים אי שוויון $k_\lambda \geq m_\lambda$.

הוכחה

יהי λ ערך עצמי של A, יהי V_λ מרחב עצמי, $V_\lambda = \{v \in \mathbb{F}^n : Av = \lambda v\}$, $m_\lambda = \dim V_\lambda$.

נבחר בסיס 'B של V_λ: $B' = \{v_1, \dots, v_{m_\lambda}\}$. נשלים B' עד בסיס B של $\mathbb{F}^n$.

$$B = \{v_1, \dots v_{m_\lambda}, w_1, \dots\}$$

נגדיר מטריצה P: נמלא את העמודות של P ע"י וקטורים של B. P הפיכה כי העמודות שלה הם בת"ל (וקטורים של בסיס).

נחשב $P^{-1}AP$: נשתמש בכפל עמודה-עמודה:

$$P^{-1}AP = P^{-1}A\left(v_1, \dots v_{m_\lambda}, w_1, \dots\right) = P^{-1}\left(Av_1, \dots Av_{m_\lambda}, Aw_1, \dots\right) =$$

$$\left(P^{-1}\lambda v_1, \dots, P^{-1}\lambda v_{m_\lambda}, P^{-1}Aw_1, \dots\right) = (\lambda(P^{-1}v_1) \dots, \lambda(P^{-1}v_{m_\lambda}, *, \dots *)$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & A' & \dots & A' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A' & \dots & A' \end{pmatrix}$$

$$p_A(x) = p_{P^{-1}AP}(x) = \det\left(xI - \begin{pmatrix} \lambda & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & A' & \dots & A' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A' & \dots & A' \end{pmatrix} \right)$$

$$= det \begin{pmatrix} x - \lambda & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & x - \lambda & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & xI - A' & \dots & -A' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -A' & \dots & xI - A' \end{pmatrix}$$

$$= (x - \lambda)^{m_\lambda} \cdot \det(xI - A')$$

כלומר $p_A(x)$ מתחלק ל- $(x-\lambda)^{m_\lambda}$, ז"א, $k_\lambda \geq m_\lambda$

■

משפט

וקטורים עצמיים המתאימים לערכים עצמיים שונים הם בת״ל.

(ז״א, אם A מטריצה, $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ ערכים עצמיים שונים של A, ואם $v_1, \ldots, v_s$ וקטורים עצמיים המתאימים ל$\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, אזי $\{v_1, \ldots, v_s\}$ בת״ל)

הוכחה

בשלילה, נניח ש $\{v_1, \ldots, v_s\}$ ת״ל. ז״א, קיימים $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{F}$ לא כולם אפסים, כך ש- $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_s v_s = 0$ (*) נניח שזו תלות ליניארית מינימלית. ז״א כל תת קבוצה של $\{v_1, \ldots, v_s\}$ היא בת״ל. אחרי כפל ב - A, נקבל: $A(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_s v_s = A \cdot \vec{0}$.

$$\alpha_1(Av_1) + \cdots + \alpha_s(Av_s) = \vec{0}$$

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_s \lambda_s v_s = \vec{0} \ (**)$$

אחרי כפל של (*) ב λ_s נקבל:

$$\alpha_1 \lambda_s v_1 + \cdots + \alpha_s \lambda_s v_s = \vec{0}$$

אחרי החיסור נקבל:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_s)v_1 + \cdots + \alpha_{s-1}(\lambda_{s-1} - \lambda_s)v_{(s-1)} = \vec{0}$$

לכן, לפי ההנחה על מינימליות, כל המקדמים מתאפסים, ז״א $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_s) = 0$

$$\alpha_{s-1}(\lambda_{s-1} - \lambda_s) = 0$$

לפי ההנחה במשפט, $\lambda_{s-1} \neq \lambda_s \neq \lambda_1$

לכן, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{s-1} = 0$

נציב ב(*) ונקבל $\alpha_s v_s = \vec{0}$, $v_s \neq \vec{0}$, לכן $\alpha_s = 0$ בסתירה.

מסקנה

תהי $A_{n \times n}$ אם לA יש n ערכים עצמיים שונים, אזי A לכסינה.

הוכחה

נסמן $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ את כל הע״ע של A. נסמן $v_1, \ldots, v_n$ ו״ע של A המתאימים לערכים העצמיים בהתאמה. אזי $\{v_2, \ldots, v_n\}$ בת״ל, לכן $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס של $\mathbb{F}^n$. מצד שני, B מורכב מווקטורים עצמיים של A. לפי קריטריון כללי ללכסון, A לכסינה.

משפט

תהי $A_{n\times n}$ מטריצה. נניח ש $p_A(x)$ מתפרק למכפלה של גורמים לינארים, ז״א, $p_A(x) = (x-\lambda_1)^{k_1} \dots (x-\lambda_s)^{k_s}$

A לכסינה אם ורק אם לכל ערך עצמי λ של A מתקיים שוויון $k_\lambda = m_\lambda$