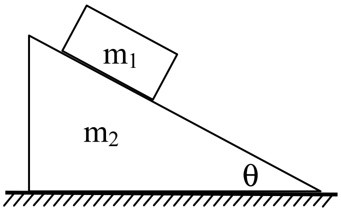
שאלה 1



מסה m_1 מונחת במנוחה על מישור משופע m_2 כמתואר באיור. בין m_2 והרצפה אין חיכוך, ובין m_1 ו-m_2 יש חיכוך עם מקדמי חיכוך קינטי וסטטי $\mu_s=\mu_k=\mu$.

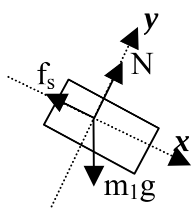
א. מחזיקים את m_2 כך שלא תוכל לנוע. מהו מקדם החיכוך הסטטי המינימאלי הנדרש μ_{min} כדי שהמסה m_1 לא תחליק על m_2 במצב הזה? שרטטו את הכוחות הפועלים על m_1 במצב זה.

ב. משחררים את m_2 מן הקיבוע ומפעילים עליה כוח אופקי אשר מאיץ אותה בתאוצה a ימינה. מהי התאוצה המקסימאלית המותרת a_{max} כך ש-m_1 תשאר במנוחה <u>יחסית</u> ל-m_2? הניחו ש-$\mu_s=\mu_{min}$ (כפי שחושב בסעיף א').

ג. מאיצים כעת את המסה m_2 ימינה בתאוצה a גדולה יותר מן התאוצה a_{max} שחשבתם בסעיף ב'. כתוצאה מכך יש תנועה יחסית בין m_1 ו-m_2. הניחו ש-$\mu=\mu_{min}$. (i) לאיזה כיוון תנוע m_1 <u>ביחס</u> ל-m_2 (במורד או מעלה המדרון)? (ii) כיתבו והסבירו את משוואת התנועה של m_1. (iii) מצאו את <u>וקטור</u> התאוצה של m_1 <u>במערכת המעבדה</u> כתלות ב-a ושאר נתוני הבעיה.

פתרון שאלה 1:

א.



כיוון כוח החיכוך נקבע שרירותית (למרות שאינטאוטיבית ניתן לקבוע כיוון זה אמור, כי m_1 נוטה להחליק למטה כאשר m_2 מקובעת). משוואת הכוחות היא:

$$N\hat{y}+m_1 g\sin\theta\hat{x}-m_1 g\cos\theta\hat{y}-f_s\hat{x}=\vec{0}$$

את החיכוך המינימאלי נקבל כאשר $f_s=\mu_{min}N$ ולכן

$$\begin{cases} N=m_1 g\cos\theta \\ m_1 g\sin\theta=\mu_{\min}N \end{cases}$$

שפתרונה הוא:

$$\mu_{min}=\mathrm{tg}\,\theta$$

ב. בסעיף זה תאוצת המסות זהה, ולכן משוואת הכוחות (במערכת הצירים שנבחרה ב-א') היא:

$$N\hat{y}+m_1 g\sin\theta\hat{x}-m_1 g\cos\theta\hat{y}-f_s\hat{x}=m_1(a\cos\theta\hat{x}+a\sin\theta\hat{y})$$

או

$$\begin{cases} N = m_1 g\cos\theta + m_1 a\sin\theta \\ f_s = m_1 g\sin\theta - m_1 a\cos\theta \end{cases}$$

נשתמש בתנאי על גבולות החיכוך הסטטי, בהנחה ש-$\mu_s = \mu_{min}$

$$-tg\theta\cdot N < f_s < tg\theta\cdot N$$

$$-tg\theta(m_1 g\cos\theta + m_1 a\sin\theta) < m_1 g\sin\theta - m_1 a\cos\theta < tg\theta(m_1 g\cos\theta + m_1 a\sin\theta)$$

מהתנאי הימני נקבל ש-$a>0$ (שזה ברור, מהדרישה ב-א'). מהתנאי השמאלי נקבל

$$-m_1 g\sin\theta - m_1 a\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} < m_1 g\sin\theta - m_1 a\cos\theta$$

$$m_1 a(\cos\theta - \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}) < 2m_1 g\sin\theta$$

$$m_1 a(\cos^2\theta - \sin^2\theta) < 2m_1 g\sin\theta\cos\theta$$

$$m_1 a\cos(2\theta) < m_1 g\sin(2\theta)$$

$$a < g\cdot tg(2\theta)$$

ג. מכיוון שב-ב' קבלנו שכאשר התאוצה מקסימאלית כוח החיכוך מכוון בכיוון <u>מורד</u> המישור, תנוע m_1 <u>במעלה</u> המישור כאשר תהיה התאוצה גדולה יותר. התנועה של m_1 מורכבת, ולכן נחשב אותה שסכום של שתי תאוצות: התאוצה של m_2 והתאוצה של m_1 <u>ביחס</u> ל-m_2, שכיוונה ידוע. לכן:

$$\overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_{12}} = (a\cos\theta\hat{x} + a\sin\theta\hat{y}) - a_{12}\hat{x}$$

משוואת התנועה היא:

$$N\hat{y} + m_1 g\sin\theta\hat{x} - m_1 g\cos\theta\hat{y} + \mu_k N\hat{x} = m_1(a\cos\theta\hat{x} + a\sin\theta\hat{y}) - m_1 a_{12}\hat{x}$$

$$\begin{cases} N - m_1 g\cos\theta = m_1 a\sin\theta \\ m_1 g\sin\theta - \mu_k N = m_1 a\cos\theta - m_1 a_{12} \end{cases}$$

כאשר הנעלמים הם N ו-a_{12}. אם נבודד את N ונציב במשוואה השנייה נקבל

$$m_1 g\sin\theta + \mu_k(m_1 g\cos\theta + m_1 a\sin\theta) = m_1 a\cos\theta - m_1 a_{12}$$

$$m_1 a_{12} = m_1 a\cos\theta - m_1 g\sin\theta - \mu_k m_1 g\cos\theta - \mu_k m_1 a\sin\theta$$

נציב $\mu_k = \mu_{min}$ ונקבל

$$m_1 a_{12} = m_1 a\cos\theta - m_1 g\sin\theta - m_1 g\sin\theta - m_1 a\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

$$a_{12} = a(\cos\theta - \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}) - 2g\sin\theta$$

$$= a\frac{\cos(2\theta)}{\cos\theta} - 2g\sin\theta$$

ולכן ווקטור התאוצה (במערכת הצירים שנבחרה בסעיף א'):

$$\overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_{12}} = (a\cos\theta\hat{x} + a\sin\theta\hat{y}) - \left\{ a(\cos\theta - \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}) - 2g\sin\theta \right\}\hat{x} =$$

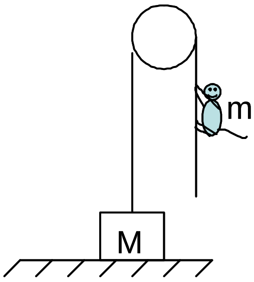
$$= \left\{ a\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + 2g\sin\theta \right\}\hat{x} + a\sin\theta\hat{y}$$

ניתן לכתוב זאת המערכת צירים שמקבילה וניצבת לקרקע:

$$\overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_{12}} = a\hat{x} + (-a_{12}\cos\theta\hat{x} + a_{12}\sin\theta\hat{y})$$

ונדרש פשוט להציב את ערכי a_{12}.

שאלה 2



קוף בעל מסה m מתחיל לטפס על החבל המוראה באיור, ממצב מנוחה כלפי מעלה. תאוצת הקוף יחסית לחבל היא: $a[m/sec^2]=bt$. החבל קשור דרך גלגלת חסרת מסה וחסרת חיכוך, למסה M המונחת על הקרקע.

א. מהי המתיחות בחבל כתלות בזמן, כל עוד המסה M לא מתרוממת?

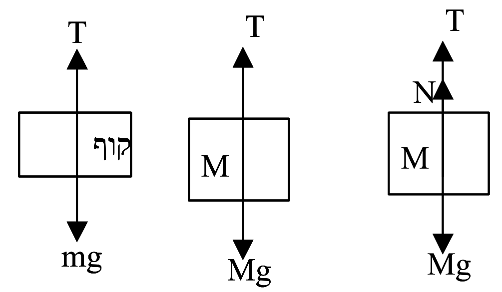
ב. מתי תחל המסה M לעלות?

ג. מהי התלות בזמן של תאוצת הקוף ותאוצת M יחסית לרצפה (לאחר שהמסה M החלה לנוע)?

ד. נניח שברגע התחלת הטיפוס, אורך החבל מתחת לקוף הוא 0. מהו אורכו כפונקציה של הזמן מרגע זה והלאה?

פתרון שאלה 2:

שירטוטי הכוחות בשאלה:



הקוף (במשך כל התנועה) *כשהמסה עולה* *כשהמסה על השולחן*

א. עד שהמסה M מתחילה לעלות תאוצת הקוף כלפי מעלה יחסית לחבל, a_{12}, היא גם תאוצת הקוף כלפי מעלה יחסית לקרקע a_1 ז"א $a_1 = a_{12}$

המשוואה על הקוף היא: $\begin{matrix} T - mg = ma_1 \\ T - mg = mbt \end{matrix}$ ומכאן: $T = m(bt + g)$

ב. התנאי שהמסה M תחל לעלות הוא N=0 ז"א T=Mg כיוון שזה על סף תנועה המשוואה למתיחות עדין בתוקף ונקבל:

m(bt+g)=Mg

$t = \frac{Mg - mg}{mb}$ כדי שהמסה M תחל לעלות בכלל נדרש M>m אחרת הקוף בעצם לא היה מצליח לעלות בכלל.

ג. עכשו מתחילים עם תאוצה יחסית. נגדיר את תאוצת המסה M כלפי מטה כ- a_2 ולכן נקבל שתאוצת הקוף יחסית לקרקע כלפי מעלה היא: $a_1 = a_{12} - a_2$ (וקטורית זה אמור להכתב כ- $\vec{a}_1 = \vec{a}_{12} + \vec{a}_{rope}$ - כאשר תאוצת החבל הפוכה לכיוון תאוצה הגוף M)

ומשוואות הגופים הם: $\begin{aligned} T - Mg &= ma_2 \\ T - mg &= ma_1 \end{aligned}$ כשנציב את התאוצה של הקוף נקבל:

$$\begin{aligned} T - Mg &= ma_2 \\ T - mg &= m(bt - a_2) \end{aligned}$$

ומשוואות אלו נקבל את הקשר: $Mg + ma_2 = mg + mbt - ma_2$

$$\leftarrow \qquad a_2 = \frac{mbt + (m - M)g}{2m}$$

(ניתן לראות כי תאוצה זו חיובית עבור כל זמן הגדול מהתנאי שנמצא בסעיף ב').

$$\leftarrow \qquad a_1 = bt - a_2 = bt - \frac{mbt + (m - M)g}{2m} = \frac{mbt + (M - m)g}{2m}$$

(ניתן לראות שאם M>m תאוצת הקוף תמיד חיובית – ז"א כלפי מעלה)

ד. $x = \int_0^t vdt = \int_0^t \left[\int_0^t a_{12} dt \right] dt = \int_0^t \left[\int_0^t btdt \right] dt = \int_0^t \frac{1}{2} bt^2 dt = \frac{1}{6} bt^3$

(תנאי ההתחלה נתונים בשאלה כמהירות אפס ואורך חבל אפס).

כיוון שהתאוצה נתונה באופן יחסי לחבל הסעיף הנ"ל נהיה די פשוט.