הרצאה XVIII- מכניקה

תזכורת: מתקיים $F=-\left[\frac{\partial U}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial U}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial U}{\partial z}\hat{z}\right]:=-\vec{\nabla}U$. ז"א $\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$, יצור זה נקרא אופרטור.

- רק בכוחות משמרים האנרגיה הפוטנציאלית נשמרת.

תרגיל: רוצים למצוא את הכוח שעבורו האנרגיה הפוטנציאלית נראית כך: $U(x)=xy^2$.

פתרון: מתקיים $\frac{\partial U}{\partial y}=y^2$ וגם $\frac{\partial U}{\partial x}=2yx$, ולכן $F=-[y^2\hat{x}+2yx\hat{y}]=-y^2\hat{x}-2xy\hat{y}$.

חשוב לדעת שסדר הנגזרות החלקיות לא משנה. ז"א $\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial U}{\partial y}\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right]=\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}$ (בהנחה שU מוגדר). בתרגיל שלנו

מתקיים $\frac{\partial F_y}{\partial x}=\frac{\partial F_x}{\partial y}=2y$, $2y$, וזהו התנאי ההכרחי לכך שכח כלשהו הוא משמר.

דוגמא: $F=y\hat{x}-x\hat{y}$, אבל $\frac{\partial F_x}{\partial y}=1\neq\frac{\partial F_y}{\partial x}=-1$ ולכן הכח לא משמר.

בתלת מימד כוחות משמרים יקיימו: $\frac{\partial F_z}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x}$. ומתקיים $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$.

תרגיל: מצא את האנרגיה הפוטנציאלית של הכח הבא $F=x^2\hat{x}+y^2\hat{y}$. נבדוק שהוא אכן משמר: $\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x}=0=0$.

לכן מתקיים $U(x,y)=-\int F_x dx=-\int x^2dx=-\frac{x^3}{3}+g(y)$ אבל ידוע $-\frac{\partial U}{\partial y}=F_y=-g'(y)=y^2$ ולכן מתקיים

כי $g(y)=-\int y^2dy=-\frac{y^3}{3}+A$ ולכן $U(x,y)=-\frac{x^3}{3}-\frac{y^3}{3}+A$.

תרגיל: מצא את האנרגיה הפוטנציאלית של הכח הבא $F=x^2y\hat{x}+\frac{x^3}{3}\hat{y}$. נבדוק שהוא משמר: $\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x}=x^2=x^2$.

לכן מתקיים $U(x,y)=-\int F_x dx=-\int x^2y dx=-\frac{x^3y}{3}+g(y)$ אבל ידוע $\frac{\partial U}{\partial y}=-F_y=-\frac{x^3}{3}+g'(y)$ ומתקבל

שמתקיים $g'(y)=0$ ולכן $g(y)=constant$. ומכאן $U(x,y)=-\frac{x^3y}{3}+C$.

תרגיל: מצא את האנרגיה הפוטנציאלית של הכח הבא $F=f(x)\hat{x}$. נבדוק שהוא משמר: $\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x}=0=0$. כמו כן

מתקיים $\frac{\partial U}{\partial y}=\mathrm{F_y}=0$ מתקיים גם $U(x,y,z)=-\int F_x dx=-\int f(x)dx+g(y,z)$ ובגלל ש$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial y}$ אפשר לסמן

ש$g(y,z)=h(z)$. כמו כן $\frac{\partial h}{\partial z}=0$, $\frac{\partial U}{\partial y}=-\mathrm{F_z}=0$ ולכן $h=A$ ומתקבלת הפונקציה $U(x,y,z)=-\int f(x)dx+A$.

כוח הוא משמר או"א הוא מרכזי. נסמן $F=f(r)\hat{r}=-\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$. נראה שהוא משמר $F=\underbrace{\frac{f(r)}{r}}_{g(r)}[x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}]$ לפי

הסימון $F=g(r)[x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}]$. מתקיים $\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}[g(r)x]=x\frac{\partial g(r)}{\partial y}=x\frac{\partial g(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}$ נשים לב שבאופן כללי

מתקיים $\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{y}{r}$. ובאופן דומה $\frac{\partial F_y}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}[g(r)y]=y\frac{\partial g(r)}{\partial x}=y\frac{\partial g(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=$

$\frac{xy}{r}\frac{\partial g(r)}{\partial r}$. ולכן הכח הוא משמר, כי $\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x}$.

לאחר שהוכחנו כי הכח משמר, נמצא את האנרגיה הפוטנציאלית שלו. על פי הגדרה: $U(x,y,z)=-\int F_x dx=$

$-\int g(r)xdx+\int\frac{GMm}{r^3}xdx=GMm\int\frac{xdx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=-GMm\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+p(y,z)$.

כמו כן $p(y,z)=h(z)$, $\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{1}{2}\frac{GMm2y}{[x^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}+\frac{\partial p(y,z)}{\partial y}=\frac{GMm}{r^2}y+\frac{\partial p(y,z)}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial y}=-F_y=\frac{GMm}{r^3}y\hat{y}=$. מכאן נובע כי

מתקיים $U(x,y,z)=-\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+h(z)$, וידוע ש$\frac{\partial U}{\partial z}=-F_z=\frac{GMm}{r^3}z\hat{z}=\frac{GMmz}{[x^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}+\frac{\partial U}{\partial z}\Rightarrow h(z)=Const$.

מכאן שמתקיים $U(x,y,z)=-\frac{GMm}{r}+C$, מאיחר ואפשר להזניח את הקבוע, נקבל ביטוי כללי לאנרגיה הפוטנציאלית שהוא $U(x,y,z)=-\frac{GMm}{r}$.

בעיית המטוטלת: מטוטלת קלאסית שיוצרת זווית θ_0 עם האנך. מתקיים: $E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2$ וגם מתקיים שבכל נקודה ונקודה $v=\dot{\vec{r}}=l\dot{\theta}\hat{\theta}$. האנרגיה הפוטנציאלית שנגרמת ע"י כח המשיכה היא $U=mgz=mgl(1-\cos\theta)$. האנרגיה הכוללת $E_T=\frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2+mgl(1-\cos\theta)=mgl(1-\cos\theta_0)$. כאשר הזווית שווה לאפס, אפשר להציב ולחשב את המהירות: $v=\sqrt{2gl(1-cos\theta_0)}$.

כעת נמצא את המתיחויות: באופן כללי מתקיים: $mg-T=m\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)=ml\dot{\theta}^2$ ניתן לבודד את T ולהציב דברים ידועים על מנת לקבל $T=mg+\frac{mv^2}{l}=mg+2mg(1-cos\theta_0)$. (המתיחות שרשמנו היא בנקודת הנמוכה ביותר במסלול). עבור איזה θ_0 תתקבל מתיחות מקסימלית? נגזור ונקבל שהמתיחות המקסימלית מתקבלת כאשר $\theta_0=\pi$. נחשב את המתיחות בנקודה זו: $-(T+mg)=-\frac{m}{l}v^2$ וידוע ש$E_T=U(\theta=\pi)+\frac{1}{2}mv^2$, נבודד את המהירות, נציב, ונקבל שהמתיחות נתונה ע"י $\mathrm{T}=\frac{2\mathrm{E_T}-5mgl}{l}$.