פתרון תרגיל 2

1. א. לא. נקח $G=Z$, $H=2Z$ ו- $K=3Z$. נניח בשלילה ש- $H\cup K$ היא תת חבורה.
אז בפרט $1=3-2\in H\cup K$ בסתירה לכך ש- $1\notin H\cup K$.
הערה: אפשר להוכיח די בקלות את הטענה הבאה $H\cup K$ חבורה אם ורק אם $H\subseteq K$ או $K\subseteq H$.

ב. כן. $H\cap K$ היא תת חבורה. נשתמש בקרטריון המקוצר.
$e\in H, e\in K$ לכן $e\in H\cap K$.
לכל $x_1,x_2\in H\cap K$ מתקיים $x_1,x_2\in H$ וגם $x_1,x_2\in K$. H,K תתי חבורות לכן $x_1x_2^{-1}\in H$ וגם $x_1x_2^{-1}\in K$, לכן, $x_1x_2^{-1}\in H\cap K$.

ג. לא. נקח $G=Z_6$ $H=\langle 2\rangle=\{0,2,4\}, K=\langle 3\rangle=\{0,3\}$. $HK=\{0,1,5\}$ אינה תת חבורה כי למשל $1+1\equiv 2(\mathrm{mod}\,6)$ כך ש- $2\notin HK$.

2. א. $O_n(F)=\{A\in GL_n(F)\mid A^t=A^{-1}\}\subseteq GL_n(F)$ היא תת חבורה.

מטריצת היחידה נמצאת ב- $O_n(F)$.
כמו כן, עבור $A,B\in O_n(F)$ מתקיים $A^t=A^{-1}, B^t=B^{-1}$ לכן,

$$\left(AB^{-1}\right)^t=\left(B^{-1}\right)^tA^t=BA^{-1}=\left(AB^{-1}\right)^{-1}.$$

כלומר, $AB^{-1}\in O_n(F)$.

ב. $\{A\in M_n(F)\mid \det A=0\}\subseteq (M_n(F),+)$ היא לא תת חבורה. אין סגירות.

למשל, $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. $\det A=\det B=0$ אבל $\det(A+B)=1$.

3. א. $G=\left\{\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}\mid a,b,c\in Z_3\right\}$ קבע מהו הסדר של כל איבר בחבורה.

הסדר של איבר היחידה הוא 1. הסדר של כל איבר אחר הוא 3. אפשר לבדוק איבר איבר ואפשר בדרך הבאה:

נסמן $I+A=\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}$ כאשר $A=\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{pmatrix}$.

נשים לב כי $A^3=0$. כעת, $(I+A)^3=I+3A+3A^2+A^3$.

ב- Z_3 $(I+A)^3=I$. לכן, הסדר הוא לכל היותר 3. נשאלת השאלה האם $(I+A)^2=I$
אם כן נקבל ש- $2/3$ וזה לא ייתכן. מסקנה, אם $A\neq 0$ מתקיים $o(I+A)=3$.

ב. איבר ב- $Z_3\times Z_3\times Z_3$ הוא מסדר 1 או 3. איבר היחידה הוא מסדר 1 וכל איבר אחר הוא מסדר 3 שכן, $(a,b,c)^3=(3a,3b,3c)\equiv(0,0,0)(\mathrm{mod}\,3)$.

4. אילו מתת- החבורות הציקליות הבאות הן סופיות (במקרה זה מצאו את מספר האיברים) ואילו מהן אינסופיות:

א. $\langle a=1+i\rangle$ ב- $(C^*,\cdot)$.

אם נרשום את a בצורה של $rcis\alpha$ הרי ש- $r\neq 1$ לכן , לא קיים n כך ש- $a^n=1$.
כלומר, $o(a)=\infty$ לכן, $\langle a=1+i\rangle$ אינסופית.

ב. $\left\langle\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle$ ב- $(GL_2(R),\cdot)$.

נסמן $a=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow a^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow a^3=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow ....\Rightarrow a^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$

לכן אף פעם לא נגיע ל - I . נקבל $o(a)=\infty$ לכן, $\left\langle\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle$ אינסופית.

5. אילו מן החבורות הבאות הן ציקליות? עבור החבורות הציקליות מצאו יוצר, אחרת הסבירו מדוע החבורה אינה ציקלית.

א. $Z_{10}\times Z_{15}$. $|Z_{10}\times Z_{15}|=150$ אם החבורה ציקלית צריך להיות בא איבר מסדר 150.
אבל אין איבר מסדר מ -150 שכן לכל $(a,b)\in Z_{10}\times Z_{15}$ מתקיים ,
$(a,b)^{30}=30(a,b)=0$. לכן היא אינה ציקלית.

ב. $Z_5\times Z_2$. $|Z_5\times Z_2|=10$. אם החבורה ציקלית צריך להיות בא איבר מסדר 10.
$(1,1)$ איבר מסדר 10 ויוצר את החבורה. לכן היא ציקלית.