פתרון תרגיל 5 אינפי 1 תיכוניסטים תש"ף

25 בנובמבבר 2019

1. (א) הטענה נכונה. מצד אחד, לפי הגדרת הגבול העליון קיימת תת־סדרה (a_{n_k}) של (a_n) המקיימת: $a_{n_k} \longrightarrow \limsup a_n$.
לפי אריתמטיקה, נקבל: $-a_{n_k} \longrightarrow -\limsup a_n$. $(-a_{n_k})$ היא תת־סדרה של $(-a_n)$, הגבול התחתון הוא הגבול החלקי הקטן ביותר ולכן: $\liminf(-a_n) \le -\limsup a_n$, כלומר:

$$-\liminf(-a_n) \ge \limsup a_n$$

לצד שני, קיימת תת־סדרה $(-a_{n_k})$ של $(-a_n)$ המקיימת: $-a_{n_k} \longrightarrow \liminf(-a_n)$, כלומר: $a_{n_k} \longrightarrow -\liminf(-a_n)$.
(a_{n_k}) היא תת־סדרה של (a_n), הגבול העליון הוא הגבול החלקי הגדול ביותר ולכן: $\limsup a_n \le -\liminf(-a_n)$. שני האי־שוויונים (שוויונות? אי־השוויונות? איך אומרים את זה??) נותנים את הדרוש.

(ב) הפרכה, ניקח: $a_n = (-1)^n,\ b_n = (-1)^{n+1}$. $a_n + b_n = 0$ סדרה קבועה, וכל הגבולות החלקיים שלה הם 0; בפרט: $\limsup(a_n + b_n) = 0$.
מצד שני, $\limsup a_n = \limsup b_n = 1$ ולכן: $\limsup a_n + \limsup b_n = 2$.

2. ראשית, נשים לב שאפשר לרשום:

$$a_{n+1} = a_n + (-1)^n \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n n!} \right)$$

נראה שהסדרה היא סדרת קושי ולכן מתכנסת.
אם כן, יהי $\varepsilon > 0$; נחפש N כך שלכל $N < m, n$ יתקיים: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.
בה"כ, $m < n$, ונוכל לרשום:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-2} - \ldots - a_{m+1} + a_{m-1} - a_m|$$

לפי א"ש המשולש:

$$\le |a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + \ldots + |a_{m+1} - a_m|$$

נשים לב ש: $a_{k+1}-a_k=(-1)^k\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k k!}\right)$. אחרי הערכים המוחלטים נקבל:

$$=\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}+\ldots+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^m m!}$$

נוריד את העצרת מכל מכנה, נקטין את המכנים ונגדיל את הביטוי:

$$<\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^m}=\frac{1}{2^{n-2}}+\ldots+\frac{1}{2^{m-1}}$$

זהו סכום של סדרה הנדסית - המנה היא $\frac{1}{2}$, יש $n-2-(m-1)=n-m-1$ איברים, ולכן:

$$=\frac{\frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{1}{2^{n-m-1}}-1\right)}{\frac{1}{2}-1}=-2\cdot\left(\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{1}{2^{m-1}}\right)=\frac{1}{2^{m-2}}-\frac{1}{2^{n-3}}<\frac{1}{2^{m-2}}$$

ולכן מספיק לדרוש: $\frac{1}{2^{m-2}}<\varepsilon$, וברור שקיים N שהחל ממנו זה אכן קורה.

3. (א) הבסיס שואף ל־1, המעריך ל־∞ ולכן נכוון לגבול של e:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{-1}{n^2+2}\right)^{4n^2+2}=\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\left(1+\frac{-1}{n^2+2}\right)^{n^2+2}\right)^{\frac{4n^2+2}{n^2+2}}=e^{-4}$$

הבסיס שואף ל־e^{-1}, המעריך שואף ל־4.

(ב) הבסיס שואף ל־1, המעריך ל־$-\frac{1}{2}$, ולכן הגבול הוא: $1^{-\frac{1}{2}}=1$.